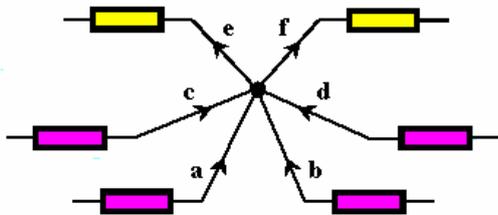
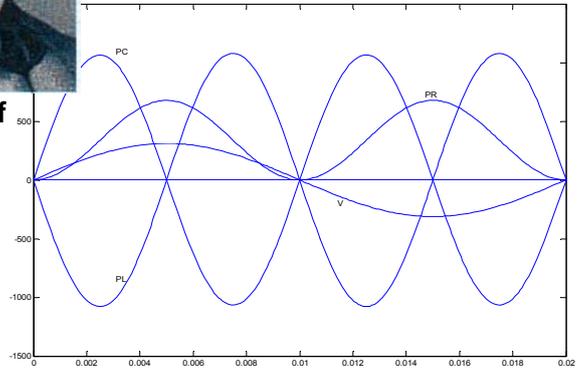
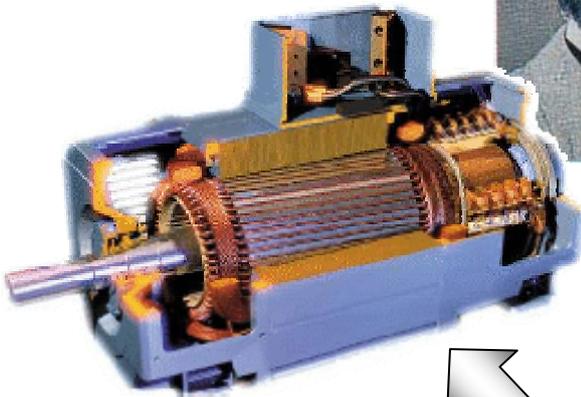


ELECTROCINETIQUE

TOME 2

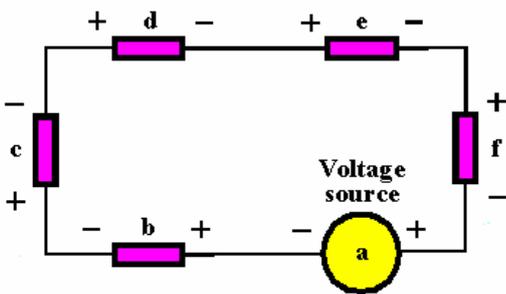


Kirchhoff



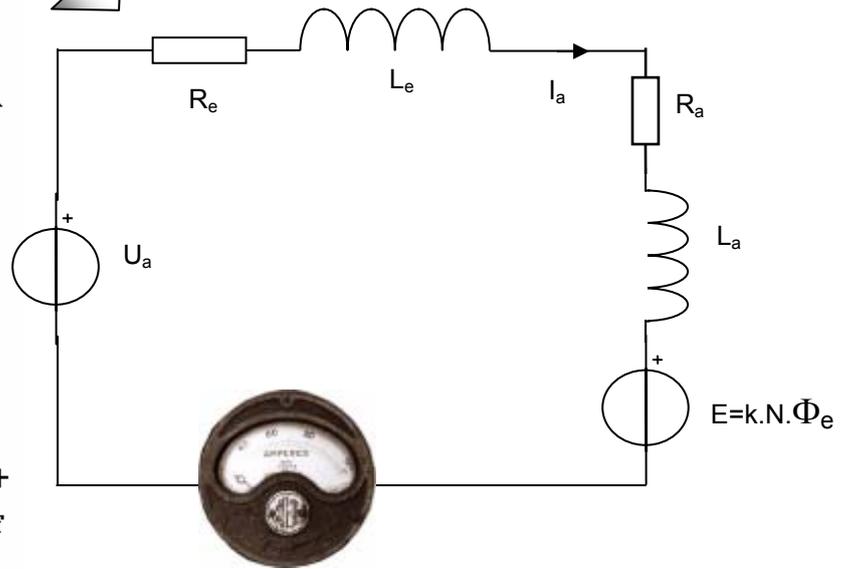
Première loi de Kirchhoff

$$a + b + c + d = e + f$$



Deuxième loi de Kirchhoff

$$a + b + c + d + e + f = 0$$



Claude Chevassu

Licence de Libre Diffusion des Documents -- LLDD version 1

Ce document peut être librement lu, stocké, reproduit, diffusé, traduit et cité par tous moyens et sur tous supports aux conditions suivantes:

- tout lecteur ou utilisateur de ce document reconnaît avoir pris connaissance de ce qu'aucune garantie n'est donnée quant à son contenu, à tout point de vue, notamment véracité, précision et adéquation pour toute utilisation;
- il n'est procédé à aucune modification autre que cosmétique, changement de format de représentation, traduction, correction d'une erreur de syntaxe évidente, ou en accord avec les clauses ci-dessous;
- des commentaires ou additions peuvent être insérés à condition d'apparaître clairement comme tels; les traductions ou fragments doivent faire clairement référence à une copie originale complète, si possible à une copie facilement accessible.
- les traductions et les commentaires ou ajouts insérés doivent être datés et leur(s) auteur(s) doi(ven)t être identifiable(s) (éventuellement au travers d'un alias);
- cette licence est préservée et s'applique à l'ensemble du document et des modifications et ajouts éventuels (sauf en cas de citation courte), quelqu'en soit le format de représentation;
- quel que soit le mode de stockage, reproduction ou diffusion, toute personne ayant accès à une version numérisée ce document doit pouvoir en faire une copie numérisée dans un format directement utilisable et si possible éditable, suivant les standards publics, et publiquement documentés, en usage.
- la transmission de ce document à un tiers se fait avec transmission de cette licence, sans modification, et en particulier sans addition de clause ou contrainte nouvelle, explicite ou implicite, liée ou non à cette transmission. En particulier, en cas d'inclusion dans une base de données ou une collection, le propriétaire ou l'exploitant de la base ou de la collection s'interdit tout droit de regard lié à ce stockage et concernant l'utilisation qui pourrait être faite du document après extraction de la base ou de la collection, seul ou en relation avec d'autres documents.

Toute incompatibilité des clauses ci-dessus avec des dispositions ou contraintes légales, contractuelles ou judiciaires implique une limitation correspondante du droit de lecture, utilisation ou redistribution verbatim ou modifiée du document.

<http://bat8.inria.fr/~lang/licence/>

Théorèmes et principes généraux de résolution des circuits

Ce chapitre est consacré à l'étude des principes, lois et théorèmes qui permettent de déterminer les inconnues d'un réseau électrique, intensité des courants électriques dans ses branches ou tensions aux bornes de ses éléments constitutifs.

Définitions générales

Un **réseau** électrique est un ensemble de générateurs, récepteurs et résistances reliés entre eux et constituant un circuit fermé.

Un **nœud** est un point où se rejoignent au moins trois conducteurs.

Une **branche** est l'ensemble des éléments situés entre deux nœuds.

Une **maille** est un contour fermé constitué par un certain nombre de branches.

Exemple :

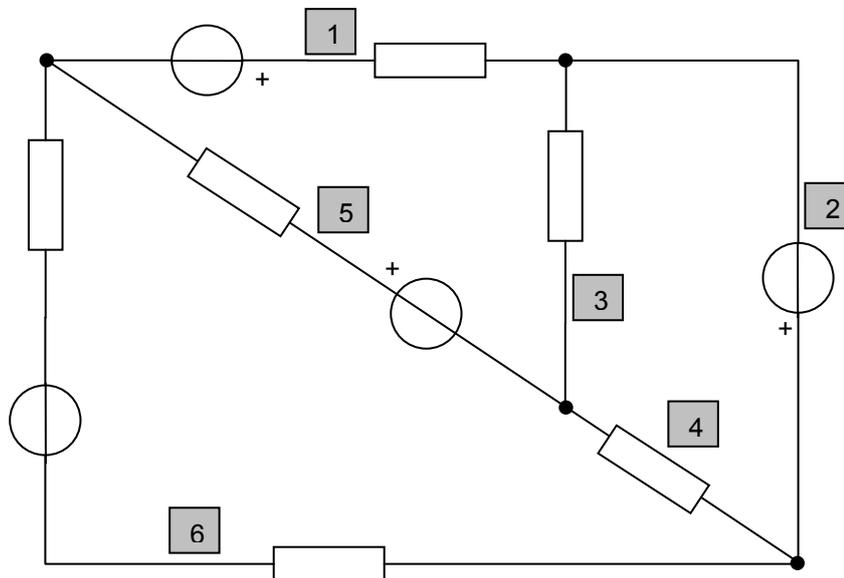
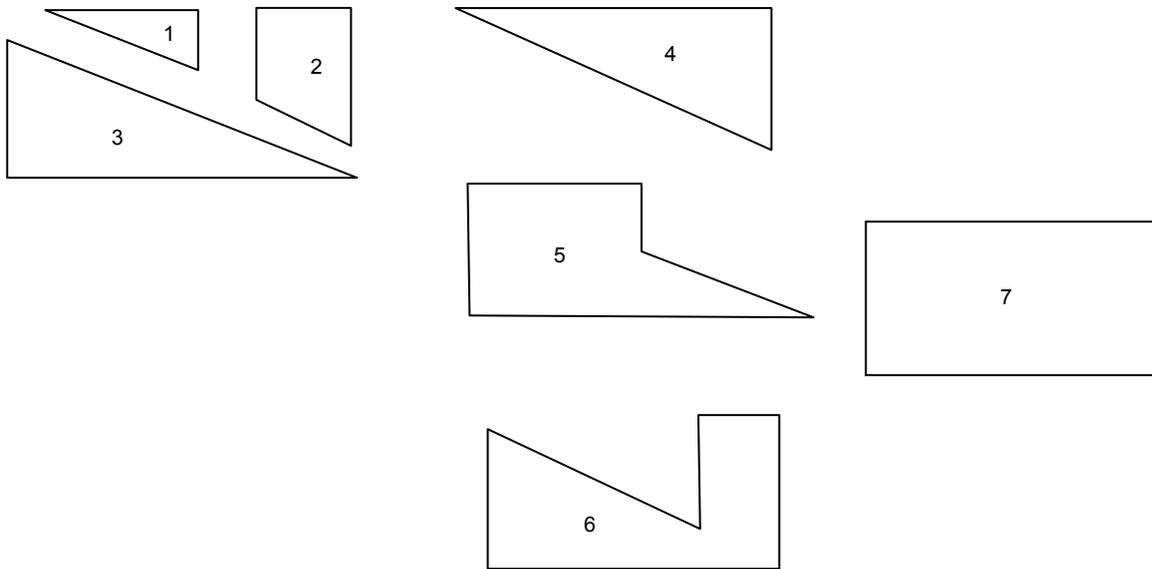


Figure 1

Le schéma de la Figure 1 comporte 4 nœuds : ● ; 6 branches indiquées par les carrés numérotés ; et 7 mailles :



Loi de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire les équations permettant de calculer les courants dans les branches d'un circuit.

Première loi : loi des nœuds

La loi des nœuds exprime le fait que les charges électriques qui parcourent les conducteurs d'un réseau électrique ne peuvent pas s'accumuler dans les diverses connexions (nœuds) du réseau. Seul les condensateurs possèdent cette propriété de pouvoir emmagasiner des charges électriques. Ainsi, la charge électrique qui arrive à un nœud à un instant t est égale à la charge qui part de ce nœud au même instant. Cette égalité entraîne l'égalité entre le débit de charge électrique qui arrive au nœud et celui qui quitte le nœud à chaque instant.

$$\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}$$

exemple :

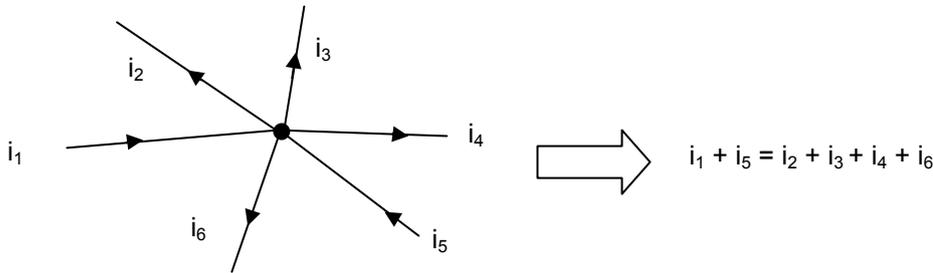


Figure 2

On peut affecter un signe aux différents courants, par exemple + pour les intensités qui se dirigent vers le nœud, - sinon et exprimer la loi des nœuds sous la forme : $\sum (\pm i) = 0$

Deuxième loi : loi des mailles

La loi des mailles exprime le fait que la d.d.p. entre deux points voisins d'un conducteur sans résistance est nulle, que l'on calcule cette d.d.p. sur le chemin le plus court ou bien en sommant les diverses d.d.p. le long d'une maille plus longue reliant ces deux points. Ceci est illustré par la Figure 3.

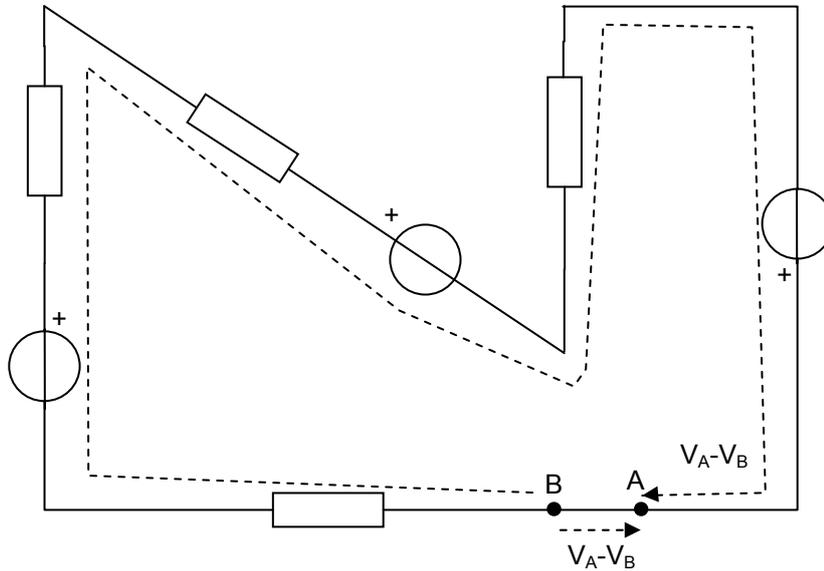


Figure 3

La somme algébrique des d.d.p. le long d'une maille est nulle.

On procède de la manière suivante pour écrire cette loi :

- On choisit le sens du courant dans chacune des branches de la maille, sens dicté par le sens physique soit par le hasard s'il est impossible de le deviner (sens du courant = flèche);
- aux bornes des différents dipôles, on place les flèches de d.d.p. (employer une couleur différente de celle du courant si possible) ;
- on choisit arbitrairement un sens de parcours sur cette maille (sens trigonométrique ou sens des aiguilles d'une montre) ;
- on choisit arbitrairement un point de départ sur la maille ;
- on effectue la somme algébrique de toutes les d.d.p. rencontrées en les affectant d'un signe + si elle sont dans le sens de progression, - sinon ;
- on arrête une fois revenu au point de départ et on écrit que cette somme est nulle.

Il peut être souhaitable d'employer de la couleur pour les différentes flèches, surtout si le schéma est complexe. Je recommande du vert ou du jaune pour les intensités et du rouge pour les d.d.p.

Exemple :

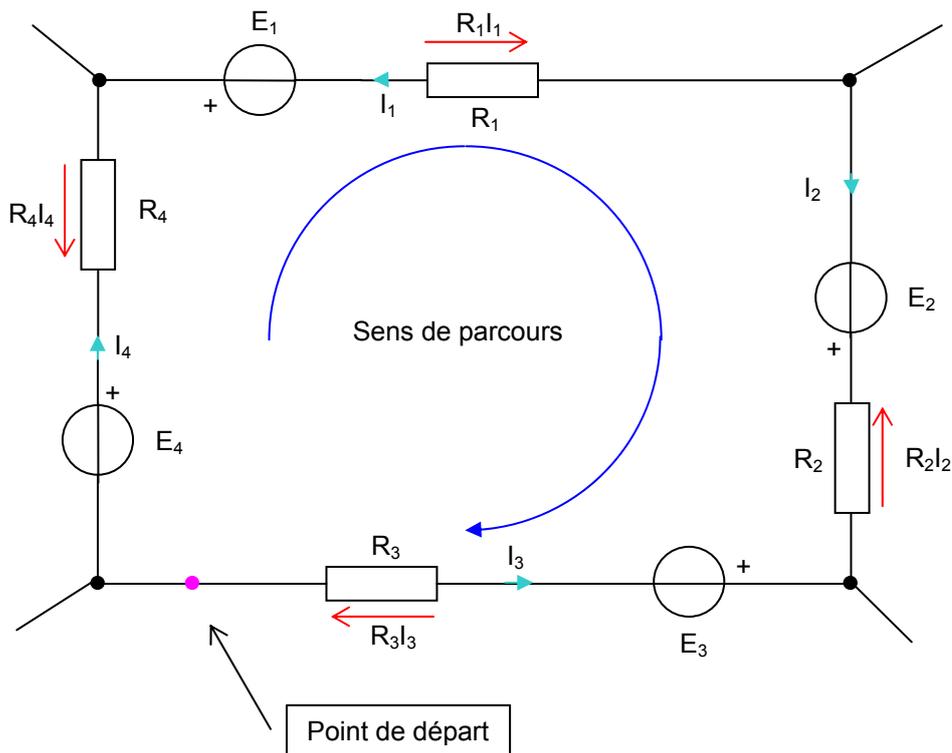


Figure 4

On obtient ici :

$$E_4 - R_4 I_4 - E_1 + R_1 I_1 + E_2 - R_2 I_2 - E_3 + R_3 I_3 = 0$$

Si on avait choisi le sens trigonométrique comme sens positif de parcours, on aurait trouvé des d.d.p. de signe opposé ce qui donne la même équation :

$$-E_4 + R_4 I_4 + E_1 - R_1 I_1 - E_2 + R_2 I_2 + E_3 - R_3 I_3 = -0 = 0 \Leftrightarrow E_4 - R_4 I_4 - E_1 + R_1 I_1 + E_2 - R_2 I_2 - E_3 + R_3 I_3 = 0$$

Mise en équation

Le réseau étudié sera éventuellement transformé de manière à ne comporter que des sources de tension.

Le réseau étudié comporte n branches ce qui donnent n inconnues : les intensités de chaque branche.

On écrit dans un premier temps les équations de nœuds. Si le réseau comporte m nœuds indépendants, on pourra écrire $m - 1$ équations de nœuds indépendantes.

Il restera ensuite à compléter ces équations par $n - (m - 1)$ équations de maille de manière à former un système de n équations à n inconnues. Afin que les équations de maille soient indépendantes, il y a lieu de les construire en considérant des branches appartenant à deux mailles au plus.

Exemple :
 Déterminons les intensités de chaque branche du schéma de la Figure 5

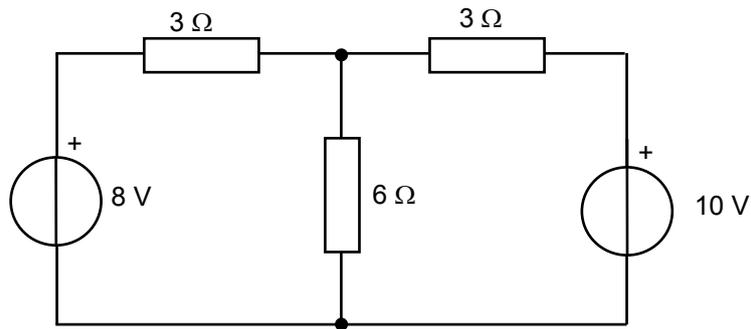


Figure 5

Le réseau de la Figure 5 comporte 3 branches, 2 nœuds et 3 mailles.
 On écrira tout d'abord $2 - 1$ équations de nœuds. Pour ce faire, il faut tout d'abord représenter les intensités dans les branches en dessinant une flèche. Nous la placerons dans le sens qui nous apparaîtra comme le plus probable, en sachant qu'en cas d'erreur de sens, le calcul nous donnera une intensité négative.

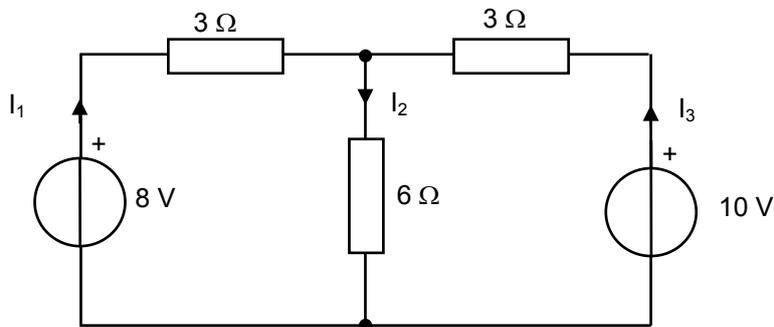


Figure 6

Le nœud supérieur de la Figure 6 donne :
 $I_1 + I_3 = I_2$

Il reste à écrire 2 équations de maille de manière à former un système de 3 équations à 3 inconnus.

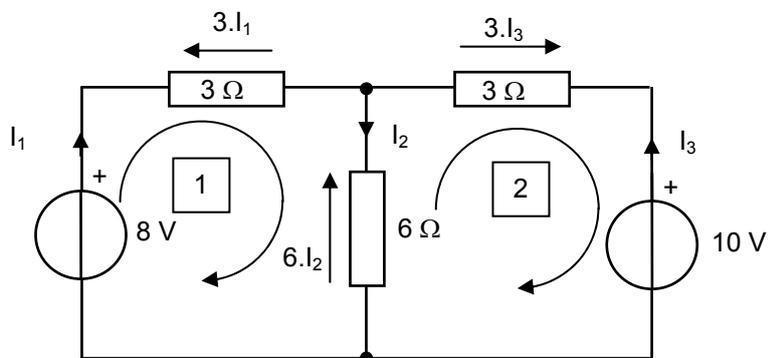


Figure 7

Maille 1 : $8 - 3I_1 - 6I_2 = 0$

Maille 2 : $6I_2 + 3I_3 - 10 = 0$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} 8 - 3I_1 - 6I_2 = 0 \\ 6I_2 + 3I_3 - 10 = 0 \\ I_1 + I_3 = I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0,2667 \\ I_2 = 1,2000 \\ I_3 = 0,9333 \end{cases}$$

La résolution « à la main » ne pose pas de problème particulier tant que l'on a affaire à des systèmes 3x3 au maximum. A partir des systèmes 4x4, il est souhaitable d'utiliser des calculatrices permettant d'effectuer des opérations sur les matrices ou des logiciels de calcul (Mathematica, Mapple, Mathcad, Matlab ou autres).

$$\begin{cases} 8 - 3I_1 - 6I_2 = 0 \\ 6I_2 + 3I_3 - 10 = 0 \\ I_1 + I_3 = I_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3I_1 + 6I_2 + 0I_3 = 8 \\ 0I_1 + 6I_2 + 3I_3 = 10 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [A][I] = [B] \Rightarrow [I] = \frac{[B]}{[A]} = \text{inv}([A])[B]$$

Principe de superposition

Le principe de superposition tient dans la définition suivante :

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K. $E \rightarrow F$ est une application linéaire si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2 \Rightarrow f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Les dipôles que nous considérons dans ce traité d'« électricité linéaire » sont linéaires. Aussi, si nous multiplions la d.d.p. d'une source de tension ou le débit d'une source de courant par n, les effets seront multipliés par n.

L'effet dû à une « cause comprenant m générateur » est la somme des effets lorsque chaque générateur est présent seul. De manière plus explicite :

La d.d.p. aux bornes d'un élément dans un réseau comportant des sources (de tension ou de courant, indépendantes ou liées) est la somme des d.d.p. dues à chacune des sources indépendantes, agissant séparément.

L'intensité du courant électrique dans une branche quelconque d'un réseau comportant des sources (de tension ou de courant, indépendantes ou liées) est la somme des courants dus à chacune des sources indépendantes, agissant séparément.

En pratique, on « éteint » toutes les sources sauf une, on effectue le calcul de la d.d.p. ou de l'intensité et on recommence jusqu'à avoir obtenu la contribution de chacune des sources. Il ne reste plus, ensuite, qu'à effectuer la somme algébrique. Attention : les sources liées ne s'éteignent pas.

Eteindre une source consiste à la remplacer par sa résistance interne. Ainsi, une source idéale de tension, de résistance interne nulle, est remplacée par un fil. Une source idéale de courant, de résistance interne infinie, sera remplacée par un interrupteur ouvert. Un moyen mnémotechnique simple consiste à enlever le rond des symboles afin de trouver par quoi remplacer la source éteinte.

Exemple : En utilisant le principe de superposition, déterminer I dans le circuit de la Figure 8 :

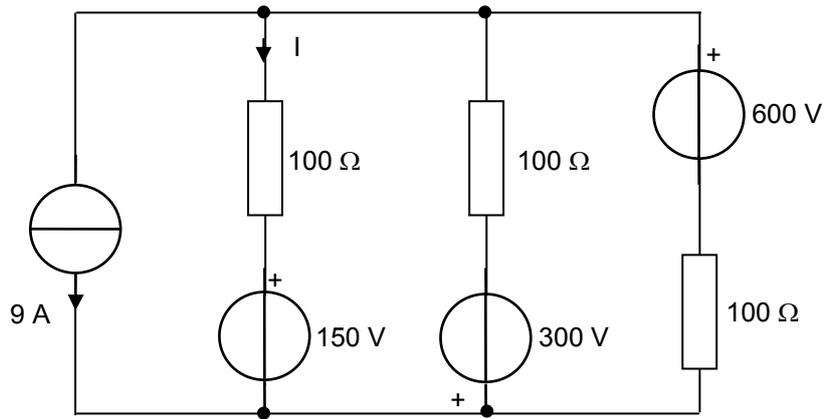


Figure 8

Nous allons redessiner le réseau en autant de dessin qu'il y a de sources. Sur chaque schéma, nous laisserons une seule source active et nous éteindrons les autres. Nous calculerons l'intensité I_k correspondant à chaque schéma et nous les sommerons ensuite.

Etape n°1 :

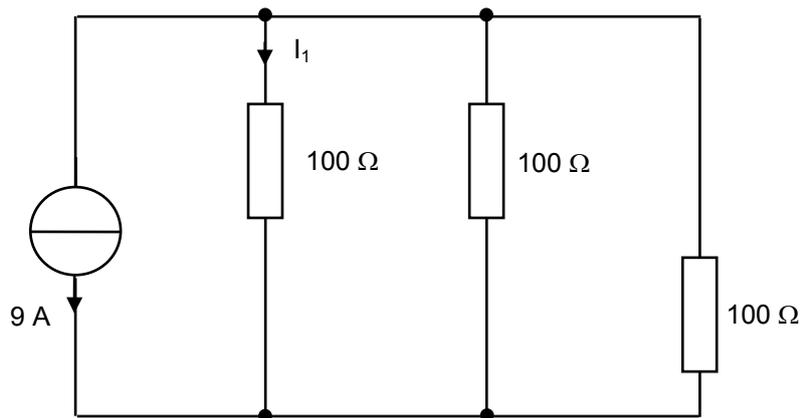


Figure 9

L'intensité débitée par le générateur idéal de courant se sépare en trois parties égales étant donné que les trois résistances ont même valeur. Dans chacune des résistances l'intensité circule du bas vers le haut. On a ainsi $I_1 = -9/3 = -3$ A.

Etape n°2 :

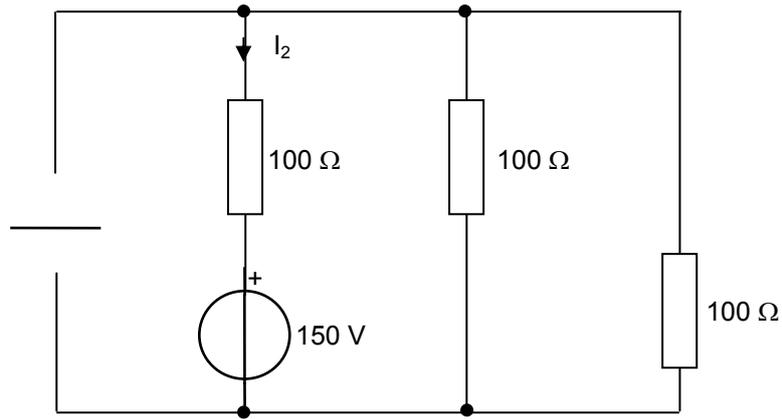


Figure 10

Le schéma de la Figure 10 se simplifie en remplaçant les deux résistances de droite par leur résistance équivalente et en supprimant la branche de gauche (celle du générateur de courant éteint). On obtient ainsi la Figure 11 :

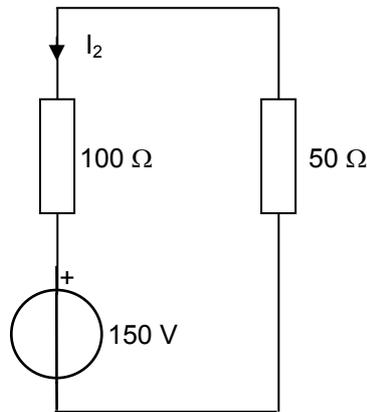


Figure 11

Ici aussi le sens de l'intensité est opposé à I_2 , nous aurons donc une intensité négative.

$$I_2 = - 150/(100+50) = - 1 \text{ A}$$

Etape n°3 :

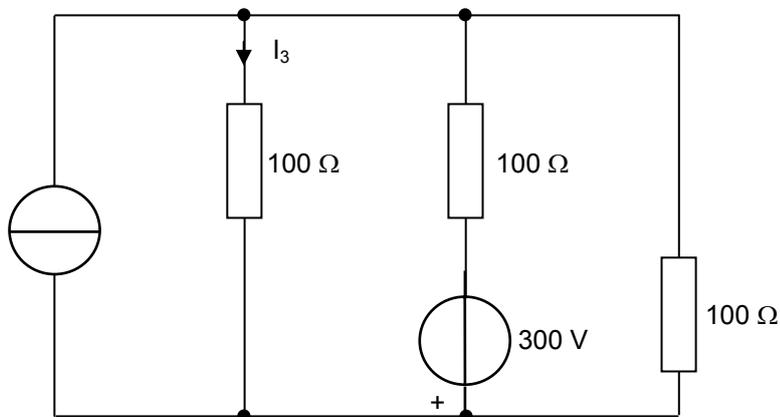


Figure 12

Nous ne simplifierons pas le schéma comme à l'étape n°2, en effet, si nous fusionnions les deux résistances de $100\ \Omega$ en une résistance équivalente, nous ne pourrions plus calculer I_3 qui circule dans la résistance de $100\ \Omega$ de gauche. Nous n'effectuerons cette opération que pour calculer l'intensité débité par la source de tension de $300\ \text{V}$. Cette source débite dans la résistance de $100\ \Omega$ en série avec elle et dans les deux résistances de $100\ \Omega$ en parallèle, équivalentes à une résistance de $50\ \Omega$. La source débite une intensité de $300/(100+50) = 2\ \text{A}$. Cette intensité se divise en deux parties égales circulant du bas vers le haut, en sens inverse par rapport au sens de I_3 .

Nous avons ainsi $I_3 = -1\ \text{A}$.

Etape n°4 :

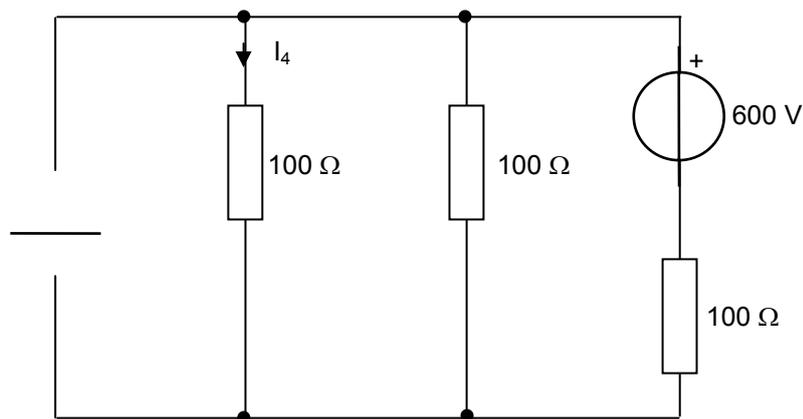


Figure 13

La source de tension débite une intensité de $600/(100+50) = 4\ \text{A}$. Cette intensité se divise en deux parties égales dans chacune des deux résistances de $100\ \Omega$ et circule du haut vers le bas. Ainsi, $I_4 = 2\ \text{A}$.

L'intensité I cherchée est la somme algébrique des intensités obtenues à chaque étape :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -3 - 1 - 1 + 2 = -3\ \text{A}.$$

Supposons que nous ayons dessiné la Figure 13, la Figure 12, la Figure 10 et la Figure 9 sur du papier calque, si nous superposons ces 4 schémas, nous retrouvons la Figure 8.

Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) était un physicien. Il établit la loi des mailles (la loi des tensions de Kirchhoff) entre 1845 et 1846 alors qu'il était étudiant à Königsberg. En 1849, il inventa la loi des nœuds (la loi des courants de Kirchhoff).



Herman von Helmholtz (1821 - 1894) fut l'un des derniers universalistes de la science. Au cours de sa carrière, il a apporté des contributions fondamentales à l'optique, à l'acoustique, à l'hydrodynamique et à l'électromagnétisme. En 1853, alors qu'il était professeur de physiologie à l'université de Königsberg, il publia un article *sur quelques lois concernant la distribution de l'électricité, avec des applications aux expériences sur l'électricité animale*, dans lequel il établissait ce qui deviendrait plus tard le Théorème de Thevenin.



Léon Thévenin, ingénieur français (né à Meaux en 1857, mort à Paris en 1926). Diplômé de l'École Polytechnique de Paris en 1876 (l'année de l'invention du téléphone par Bell), il entra en 1878 à la compagnie française des Postes et Télégraphes, où il fit toute sa carrière. En 1883, alors qu'il enseignait un cours pour les inspecteurs de la compagnie, il proposa ce que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de théorème de Thévenin. Personne ne remarqua qu'il était établi depuis 1853. Bien qu'il fut publié dans plusieurs traités d'électricité, ce théorème resta d'ailleurs peu connu jusque dans les années 20.



Edward Lowry Norton, ingénieur américain (1898 - 1983). Après des études au MIT et à Columbia University, il entra aux Bell Labs et y fit toute sa carrière, jusqu'en 1963. Il y publia peu d'articles scientifiques, dont aucun ne mentionnant le théorème qui porte son nom. L'origine de l'appellation du théorème de Norton reste encore obscure aujourd'hui. L'idée originale date de 1926 et est due à Hans Ferdinand Mayer, physicien allemand (1885-1980), qui fut directeur des laboratoires de recherches de Siemens entre 1936 et 1962.



Théorème de Thévenin

Ce théorème est très utile pour déterminer l'intensité du courant circulant dans la branche d'un réseau lorsque l'on souhaite éviter la mise en équation complète du réseau comme nous l'avons vu avec les lois de Kirchhoff. Nous ne démontrerons pas ce théorème.

Théorème de Thevenin :

Tout réseau linéaire actif présentant des connexions de sortie A, B comme le montre la Figure 14 peut être remplacée par une source de tension idéale unique E_{th} en série avec une résistance R_{th} (éventuellement une impédance Z_{th}).

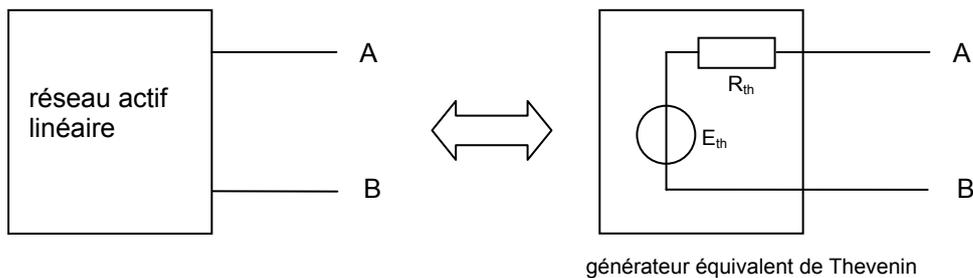
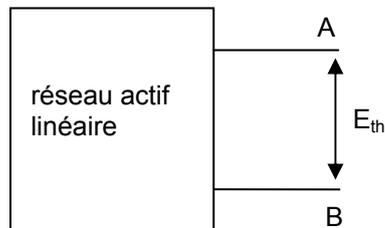


Figure 14

Méthode d'application du théorème de Thevenin

Calcul pratique du générateur équivalent :

Calcul de la valeur de E_{th} : c'est la d.d.p. qui apparaît à vide entre A et B.



Calcul de la résistance R_{th} (impédance Z_{th}) : on éteint toutes les sources et on calcule ou on mesure la résistance (l'impédance) entre A et B.

Le calcul de E_{th} et le calcul de R_{th} peuvent être effectués dans n'importe quel ordre.

Exemple 1

Dans le schéma de la Figure 15, calculons l'intensité I dans $R = 2 \Omega$ par la méthode de Thevenin.

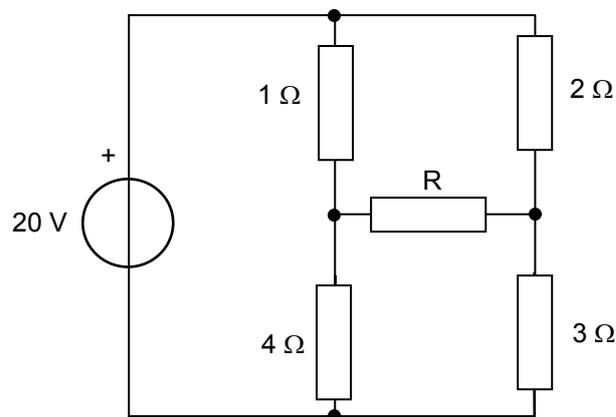


Figure 15

Le but est de remplacer le réseau aux bornes de R par un générateur équivalent de Thevenin.

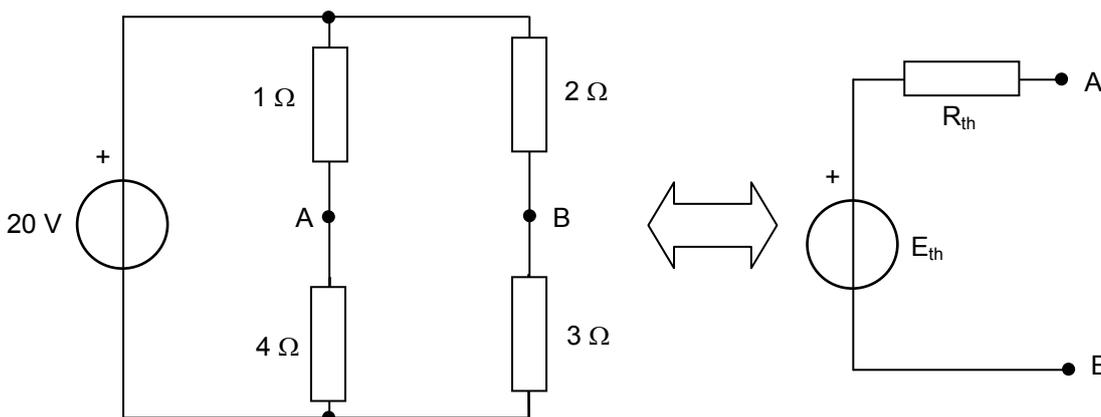


Figure 16

Calculons la résistance R_{th} . Pour cela, il faut éteindre la source de tension de f.é.m. 20 V, c'est-à-dire la remplacer par son impédance interne. Cette dernière est nulle puisqu'il s'agit d'une source de tension idéale. On calcule donc la résistance entre les points A et B sur le schéma de la Figure 17.

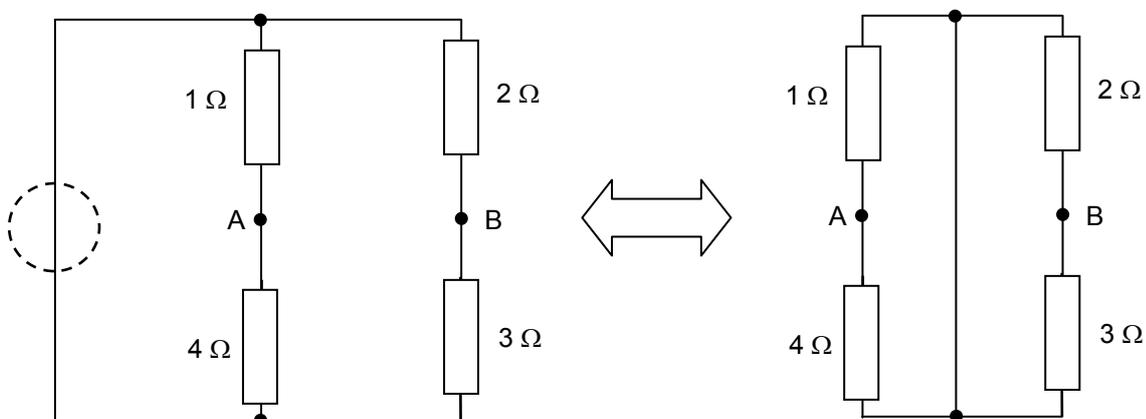
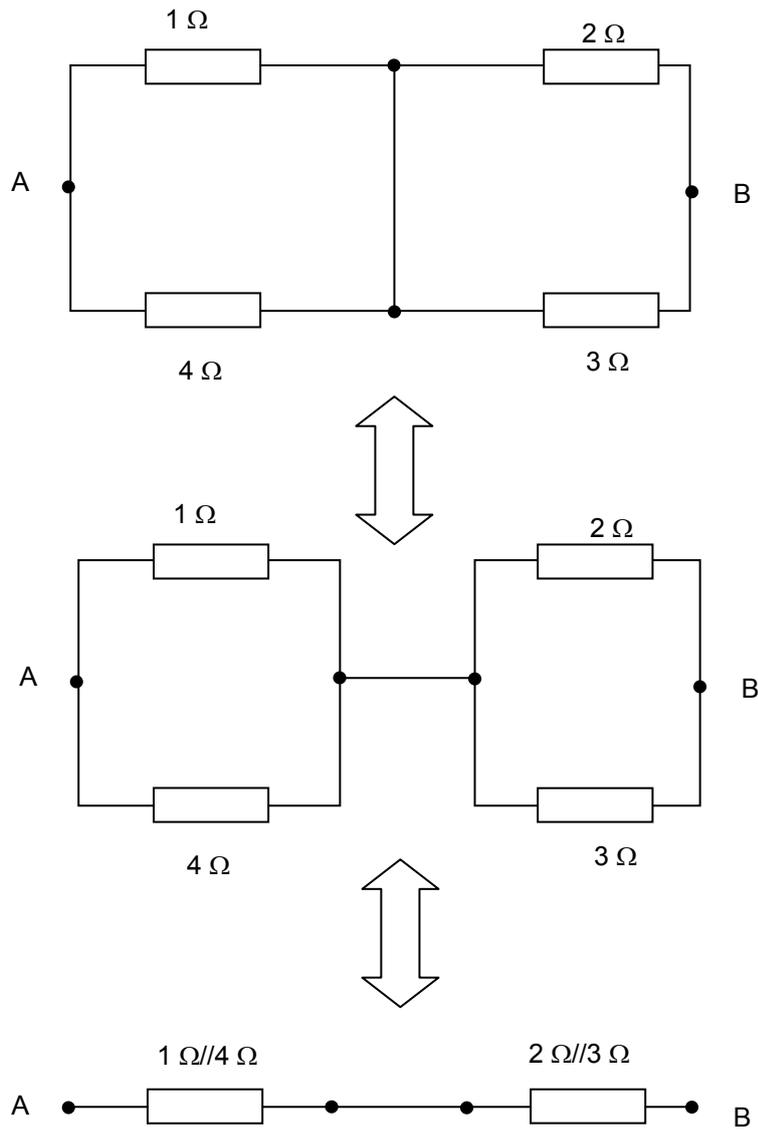


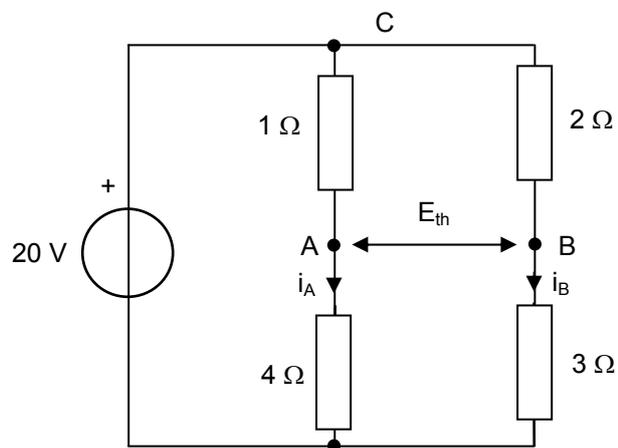
Figure 17



La résistance du générateur équivalent de Thevenin a donc pour valeur :

$$R_{th} = \frac{1 \times 4}{1 + 4} + \frac{2 \times 3}{2 + 3} = 2\ \Omega$$

Calculons E_{th} :



Nous allons calculer les intensités i_A et i_B puis les d.d.p. V_{CA} et V_{CB} . L'équation de la maille CAB permettra d'obtenir $V_{AB} = E_{th}$.

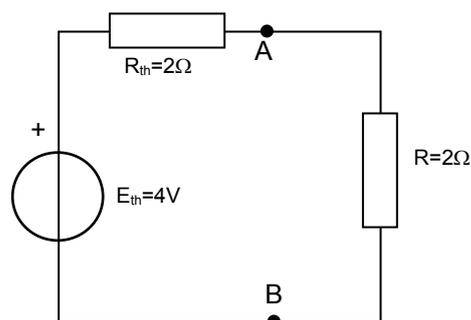
$$i_A = \frac{20}{1+4} = 4 \text{ A} \Rightarrow V_{CA} = 1 \times 4 = 4 \text{ V}$$

$$i_B = \frac{20}{2+3} = 4 \text{ A} \Rightarrow V_{CB} = 2 \times 4 = 8 \text{ V}$$

$$V_{CA} + V_{AB} + V_{BC} = 0 \Rightarrow V_{AB} = -(V_{BC} + V_{CA}) = -(-8 + 4) = 4 \text{ V}$$

Donc, $E_{th} = 4 \text{ V}$.

On peut donc redessiner le circuit initial en remplaçant le pont de Wheastone par le générateur de Thevenin :

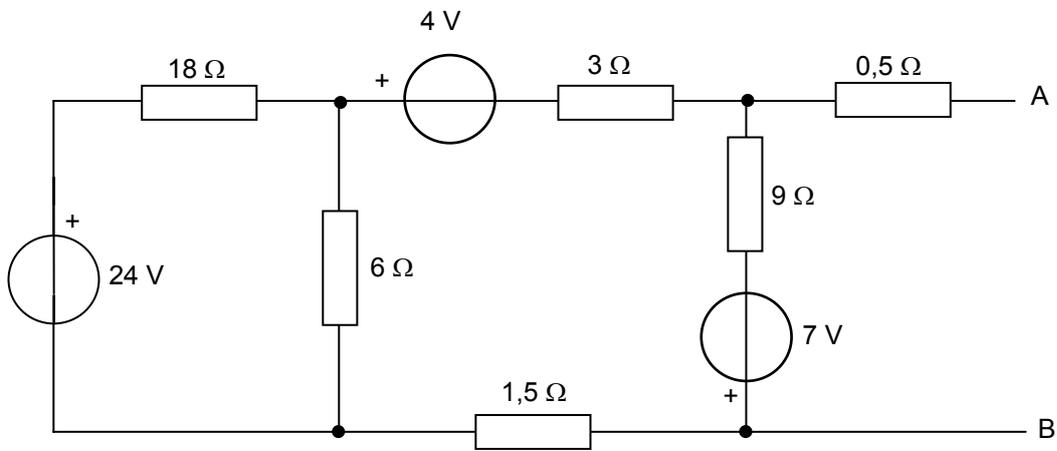


ATTENTION : Le pôle + est tourné vers A car A est positif par rapport à B : $V_{AB} > 0$.

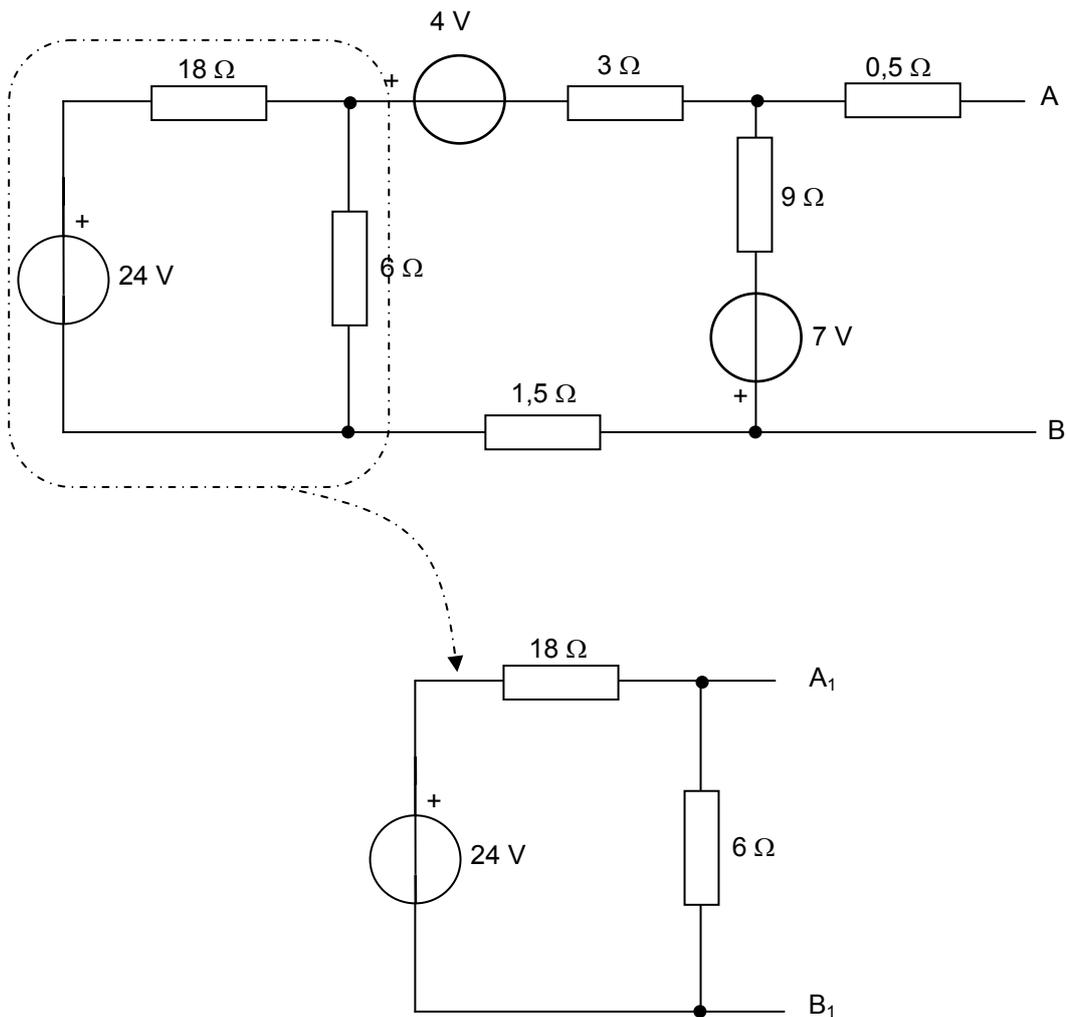
Le calcul de l'intensité qui passe dans la résistance est devenu très simple : $i = \frac{4}{2+2} = 1 \text{ A}$

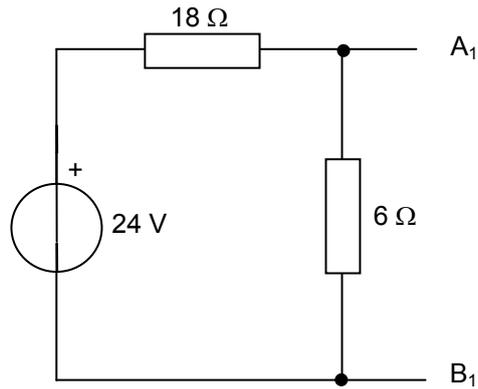
Exemple 2 :

Déterminer le générateur de Thevenin équivalent au schéma ci-dessous vu des bornes A et B :



On recherche la maille la plus éloignée des points A et B, puis on remplace cette maille par un générateur de Thevenin "intermédiaire". On réitère ensuite l'opération, progressant ainsi de proche en proche vers les points A et B.



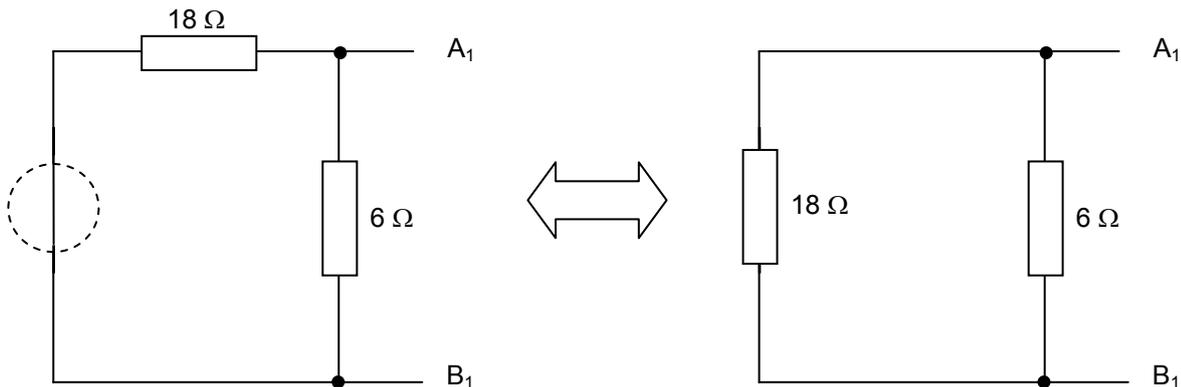


Déterminons le générateur équivalent de Thevenin entre A₁ et B₁ :

La f.é.m. s'obtient avec la formule du diviseur de tension

$$E_{ThA_1B_1} = 24 \cdot \frac{6}{18+6} = \frac{24}{3} = 6 \text{ V}$$

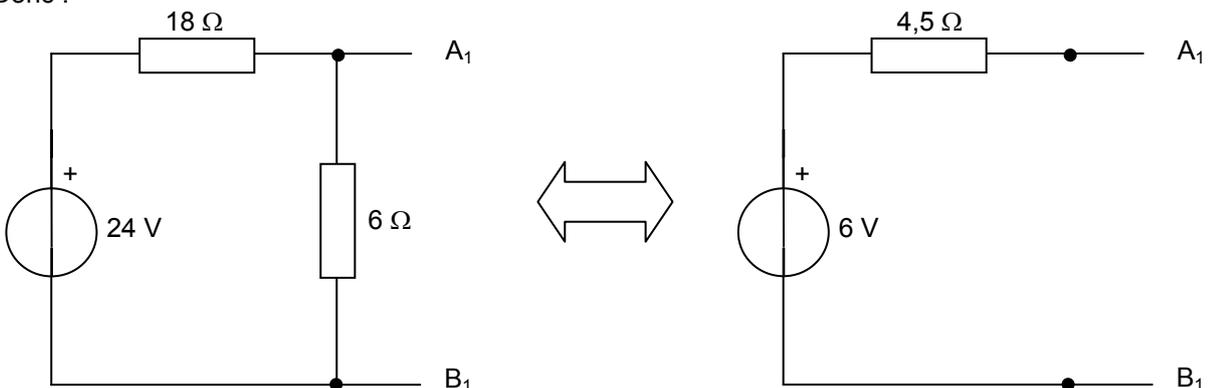
La résistance s'obtient en éteignant la source de tension de f.é.m. 24 V et en calculant la résistance vu des points A₁ et B₁.



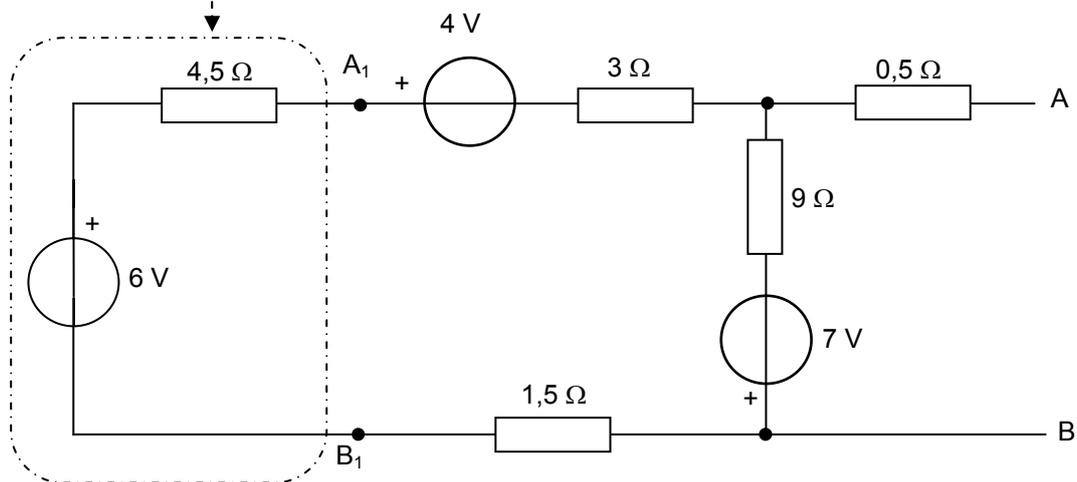
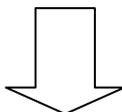
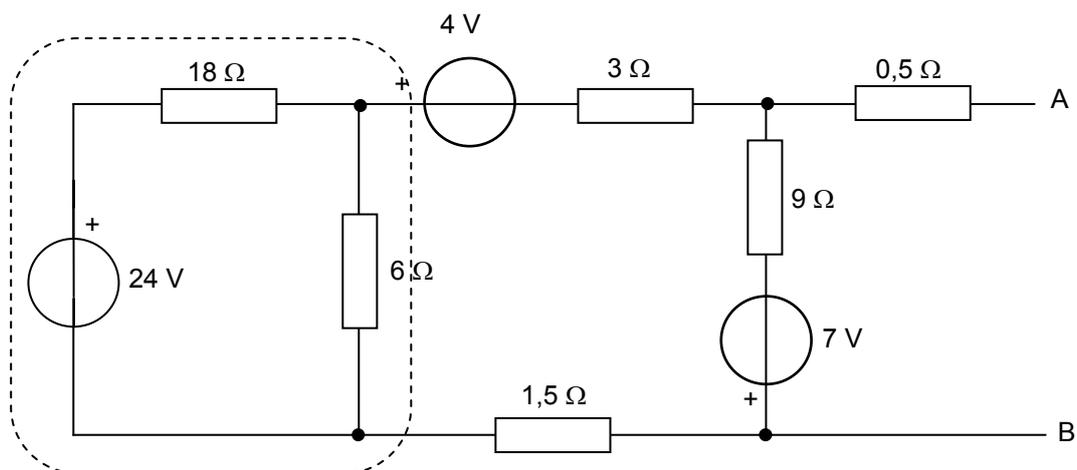
La résistance interne du générateur équivalent de Thevenin n°1 est donc

$$R_{eq} = \frac{6 \times 18}{6+18} = 4,5 \Omega$$

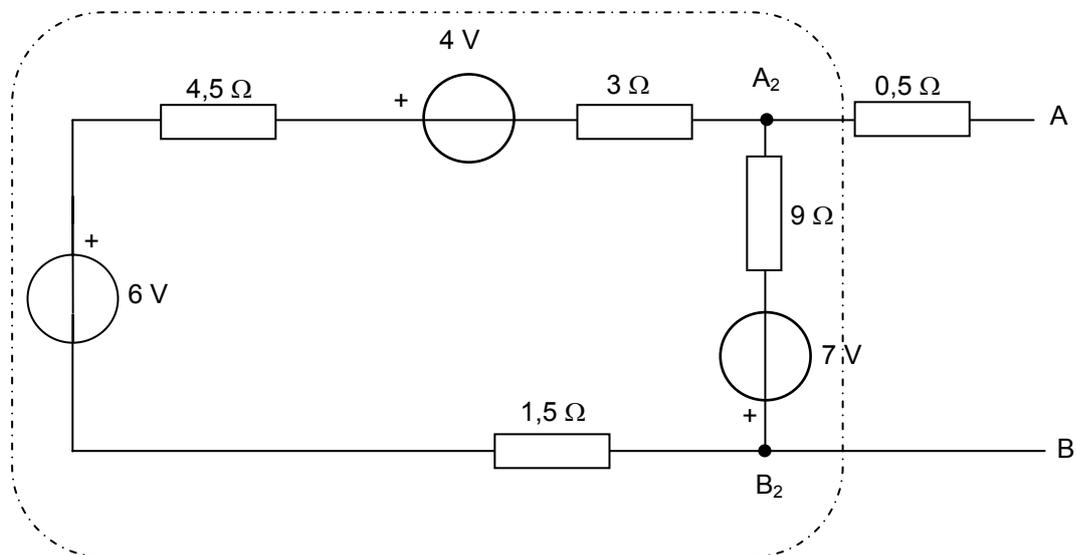
Donc :



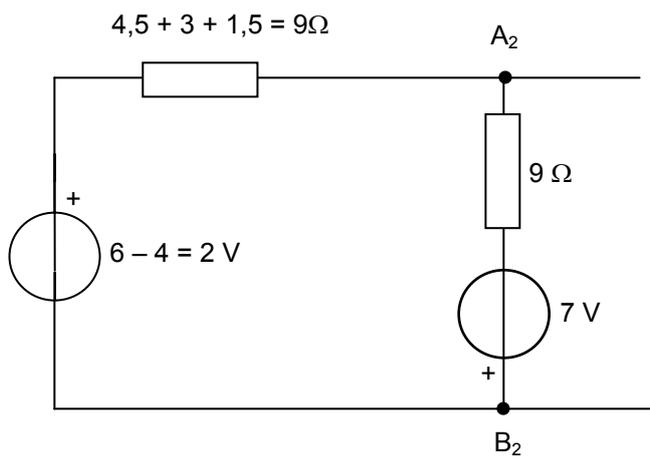
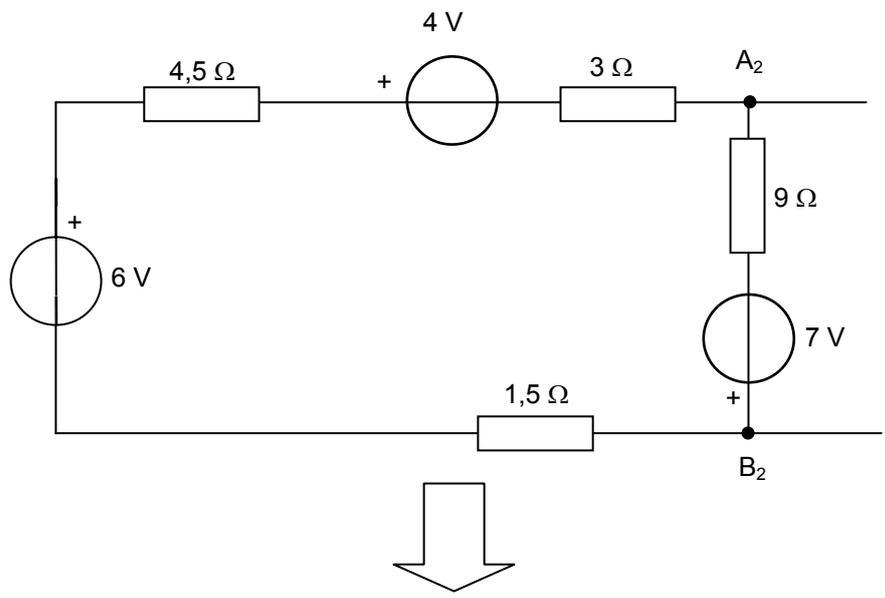
On remplace la maille par le générateur de Thevenin calculé :



On réitère le procédé, c'est-à-dire que l'on cherche à nouveau la maille la plus éloignée des points A et B, puis on remplacera cette maille par un générateur équivalent de Thevenin (indice 2).

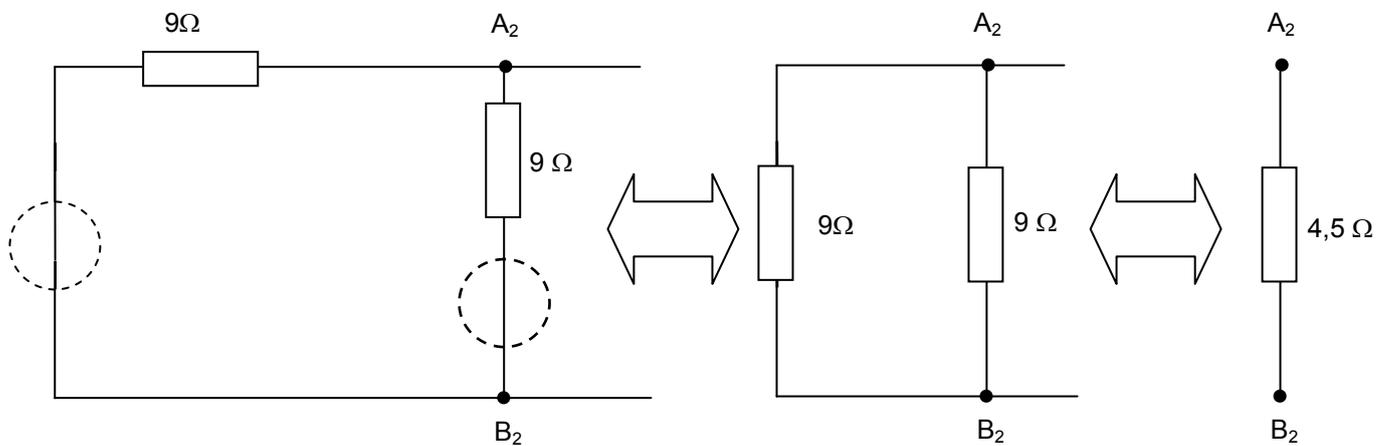


Simplifions la maille trouvée en regroupant dans chacune des deux branches les résistances et les générateurs.

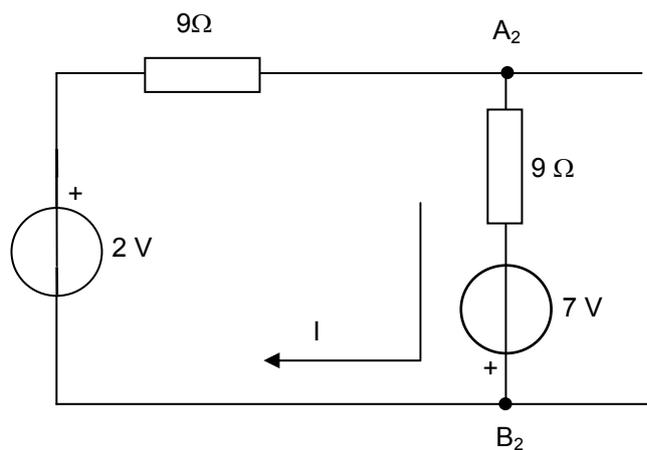


Déterminons la résistance interne du générateur de Thevenin n°2 :

Eteignons les sources de tension :



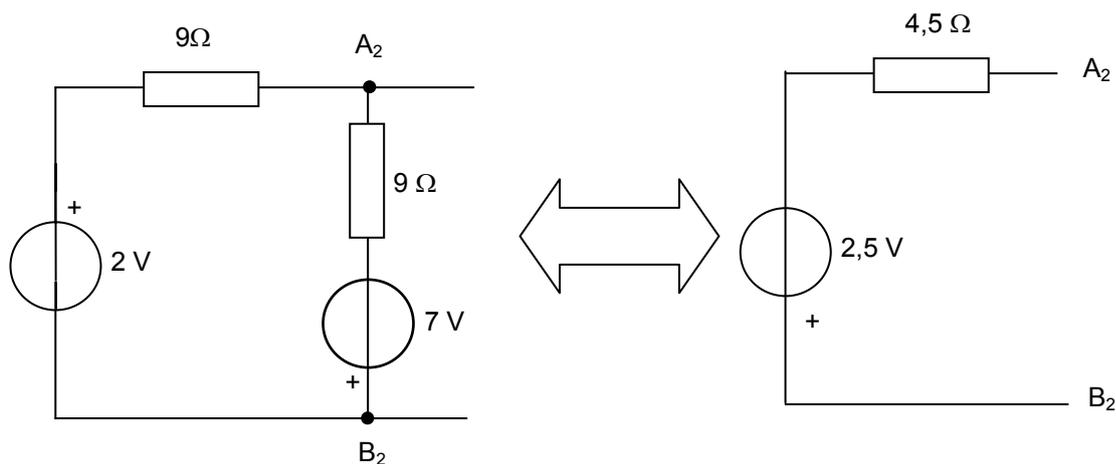
Déterminons la f.é.m. équivalente du générateur de Thevenin n°2 :



L'équation de la maille permet de déterminer I : $I = \frac{7+2}{9+9} = \frac{9}{18} = 0,5 \text{ A}$

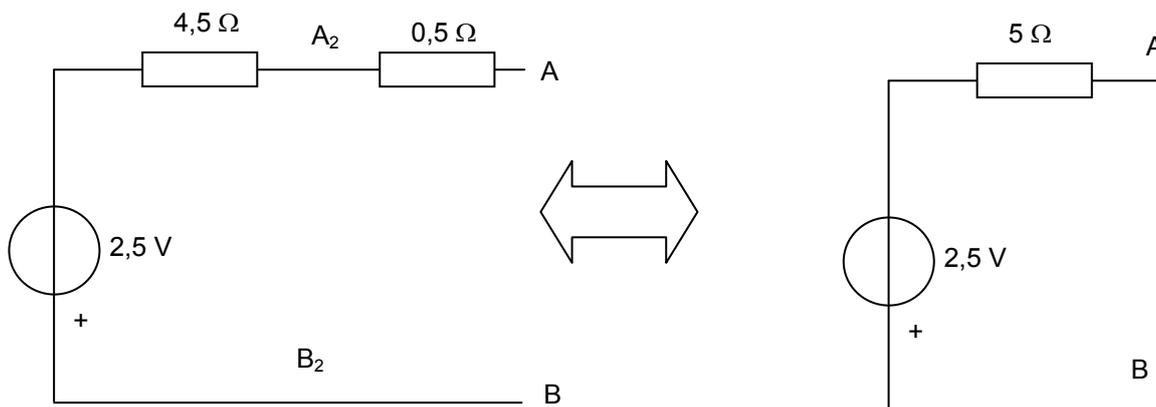
$E_{ThA_2B_2} = V_{A_2} - V_{B_2} = 9 \times I - 7 = -2,5 \text{ V}$

Donc :



Attention : le signe moins trouvé pour $E_{ThA_2B_2} = V_{A_2} - V_{B_2}$ signifie que le point B_2 est à un potentiel plus élevé que A_2 . Ainsi nous portons le signe plus sur B_2 .

Il reste à connecter la résistance de $0,5 \Omega$, ce qui nous donne finalement :



Théorème de Norton

Il est moins utilisé que celui de Thevenin, sans doute parce que la notion de source de courant est plus abstraite que celle de source de tension. Il permet également de simplifier les circuits, notamment en électronique. Nous ne démontrerons pas ce théorème.

Théorème de Norton :

Tout réseau linéaire actif présentant des connexions de sortie A, B comme le montre la Figure 18 peut être remplacée par une source de courant idéale débitant l'intensité I_N en parallèle avec une résistance R_N (éventuellement une impédance Z_N).

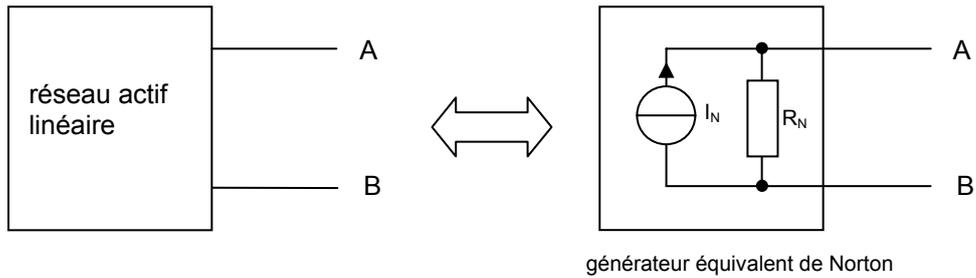


Figure 18

Méthode d'application du théorème de Norton

Calcul pratique du générateur équivalent :

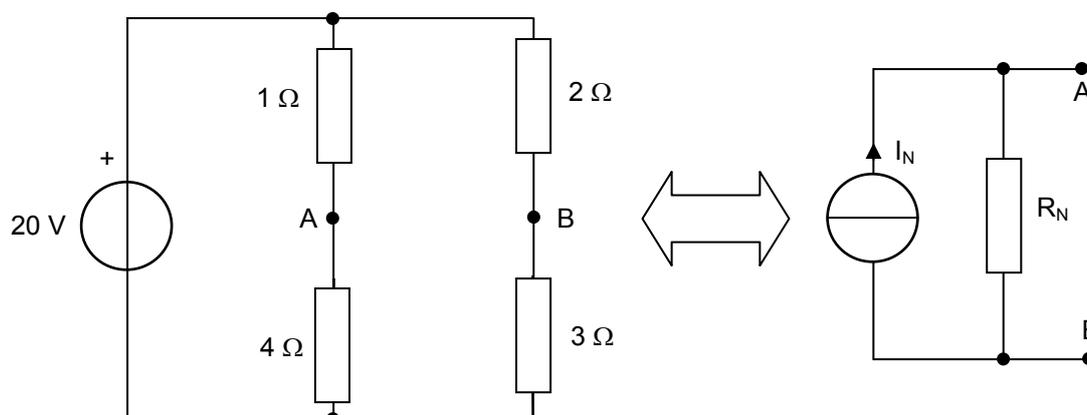
Calcul de la valeur de I_N : c'est l'intensité qui parcourt un court-circuit placé entre A et B.



Calcul de la résistance R_N (impédance Z_N) : on éteint toutes les sources et on calcule ou on mesure la résistance (l'impédance) entre A et B.

Le calcul de I_N et le calcul de R_N peuvent être effectués dans n'importe quel ordre.

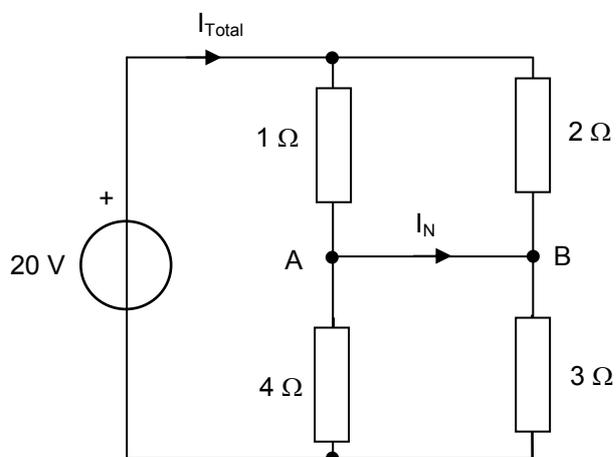
Exemple



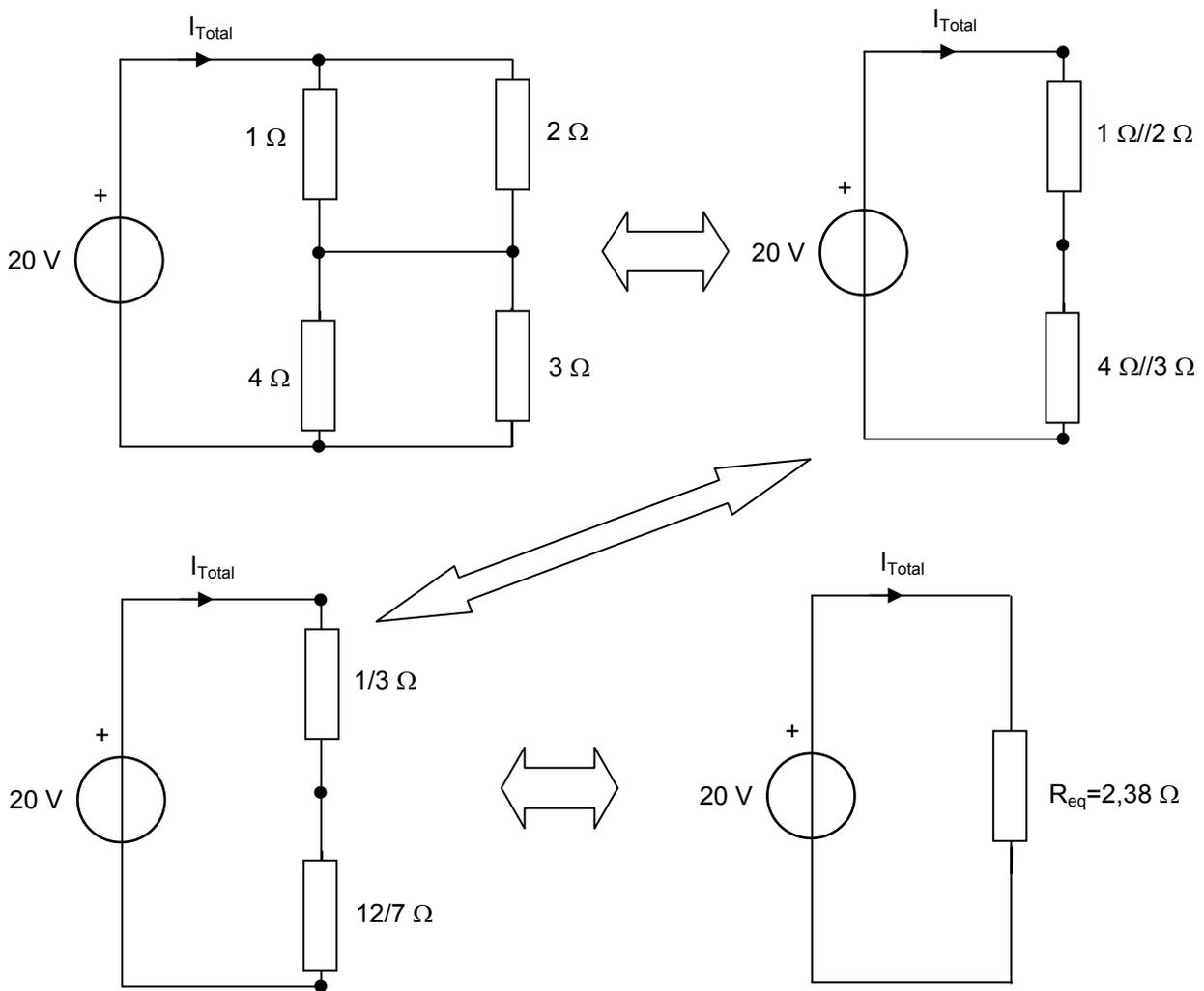
Nous reprenons le même exemple d'application que pour le théorème de Thevenin, à savoir la détermination de l'intensité dans la résistance $R = 2 \Omega$ sur le schéma de la Figure 15.

La méthode de détermination de la résistance R_N est la même que celle de R_{Th} , on obtient donc :
 $R_{Th} = R_N = 2 \Omega$

Détermination de I_N :

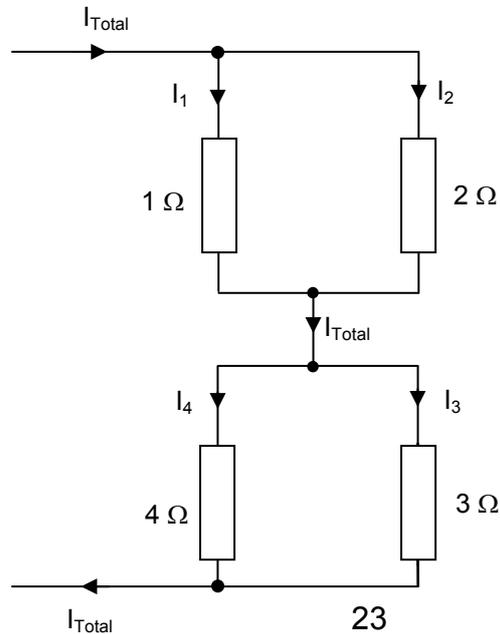


Calculons I_{Total} :



$$R_{eq} = \frac{2}{3} + \frac{12}{7} = \frac{50}{21} \approx 2,28 \Omega \Rightarrow I_{Total} = \frac{20}{\frac{50}{21}} = \frac{42}{5} \approx 8,4 \text{ A}$$

I_{Total} se sépare dans deux diviseurs de courant successifs : 1Ω et 2Ω , puis 3Ω et 4Ω .



Dans 1Ω : on a $I_1 = \frac{42}{5} \times \frac{2}{1+2} = \frac{84}{15}$ A

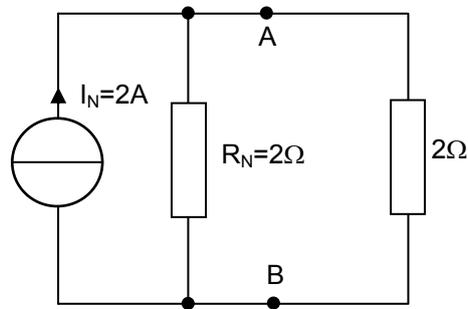
Dans 2Ω : on a $I_2 = \frac{42}{5} \times \frac{1}{1+2} = \frac{42}{15}$ A

Dans 3Ω : on a $I_3 = \frac{42}{5} \times \frac{4}{3+4} = \frac{168}{35}$ A

Dans 4Ω : on a $I_4 = \frac{42}{5} \times \frac{3}{3+4} = \frac{126}{35}$ A

D'où $I_N = I_3 - I_2 = \frac{168}{35} - \frac{42}{15} = 2$ A ($= I_1 - I_4$)

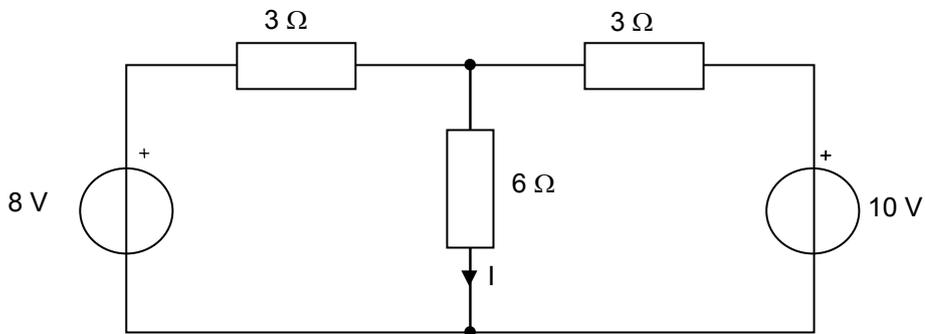
On aboutit au schéma simplifié comprenant le générateur équivalent de Norton :



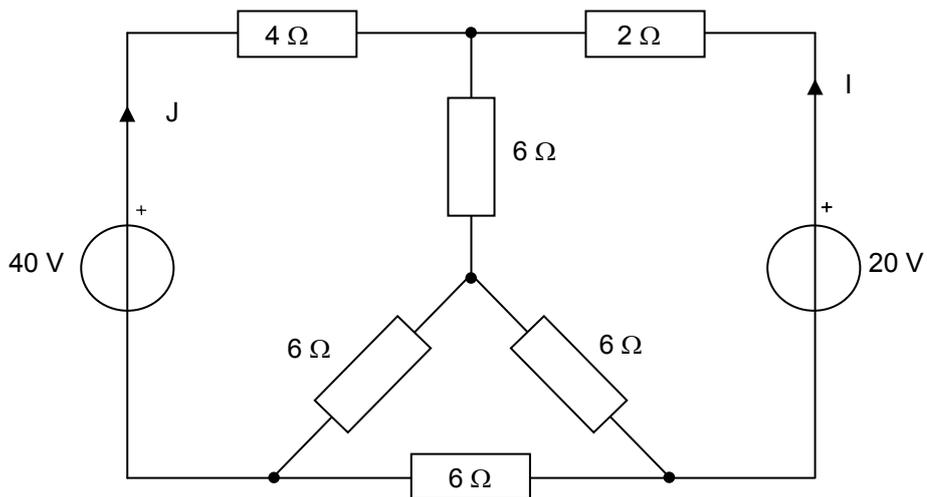
R_N et la résistance de 2Ω constituent un diviseur de courant pour I_N . Etant donné qu'elles ont même valeur, I_N sera divisé par deux. Par conséquent, l'intensité qui passe dans la résistance de 2Ω est de 1A.

Exercices :

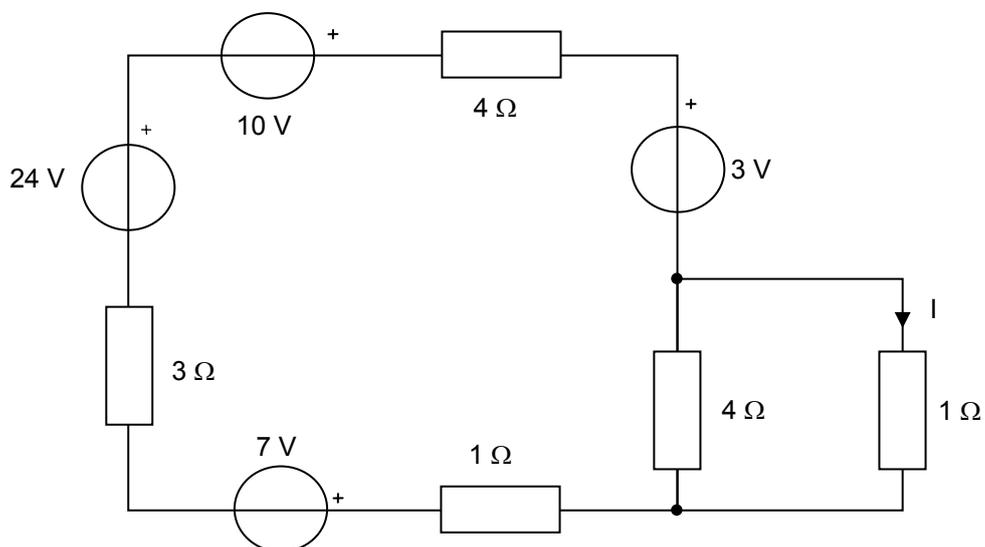
1. Déterminer I par la méthode de Kirchoff, par l'emploi du principe de superposition, par l'usage des théorèmes de Thevenin et de Norton.



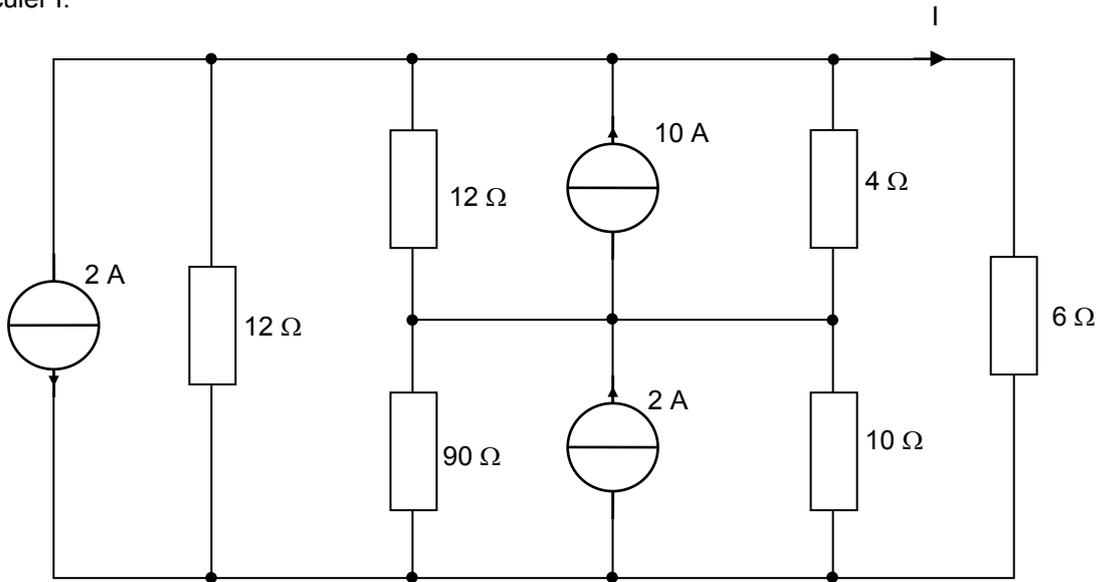
2. Déterminer I et J par la méthode de Kirchoff.



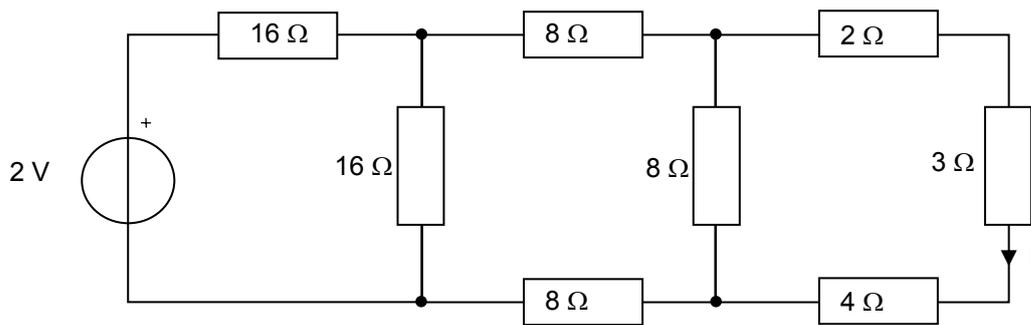
3. Calculez I .



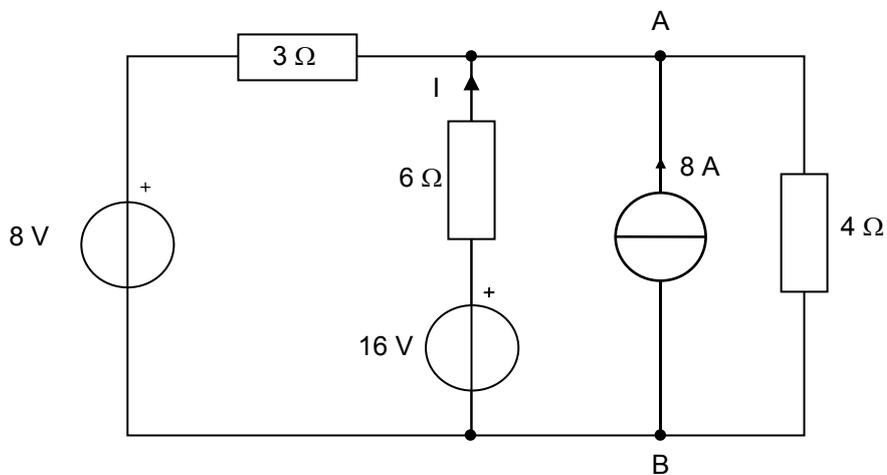
4. Calculer I.



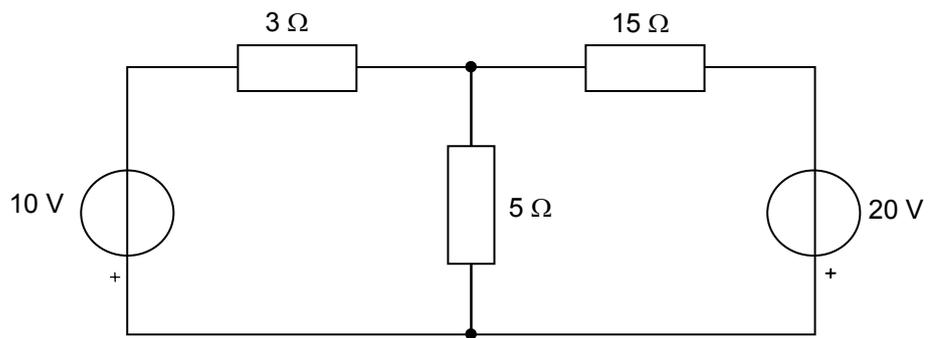
5. Calculer I par le théorème de Thevenin ou de Norton. En déduire le courant dans chaque branche.



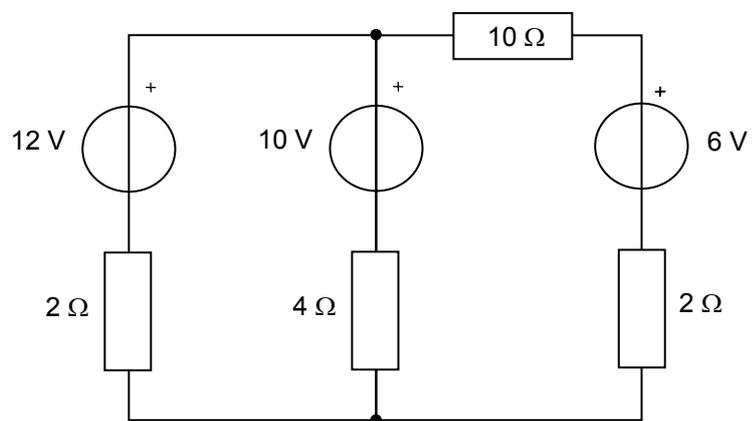
6. Calculer I par le principe de superposition, puis simplifier le schéma à gauche des points A et B.



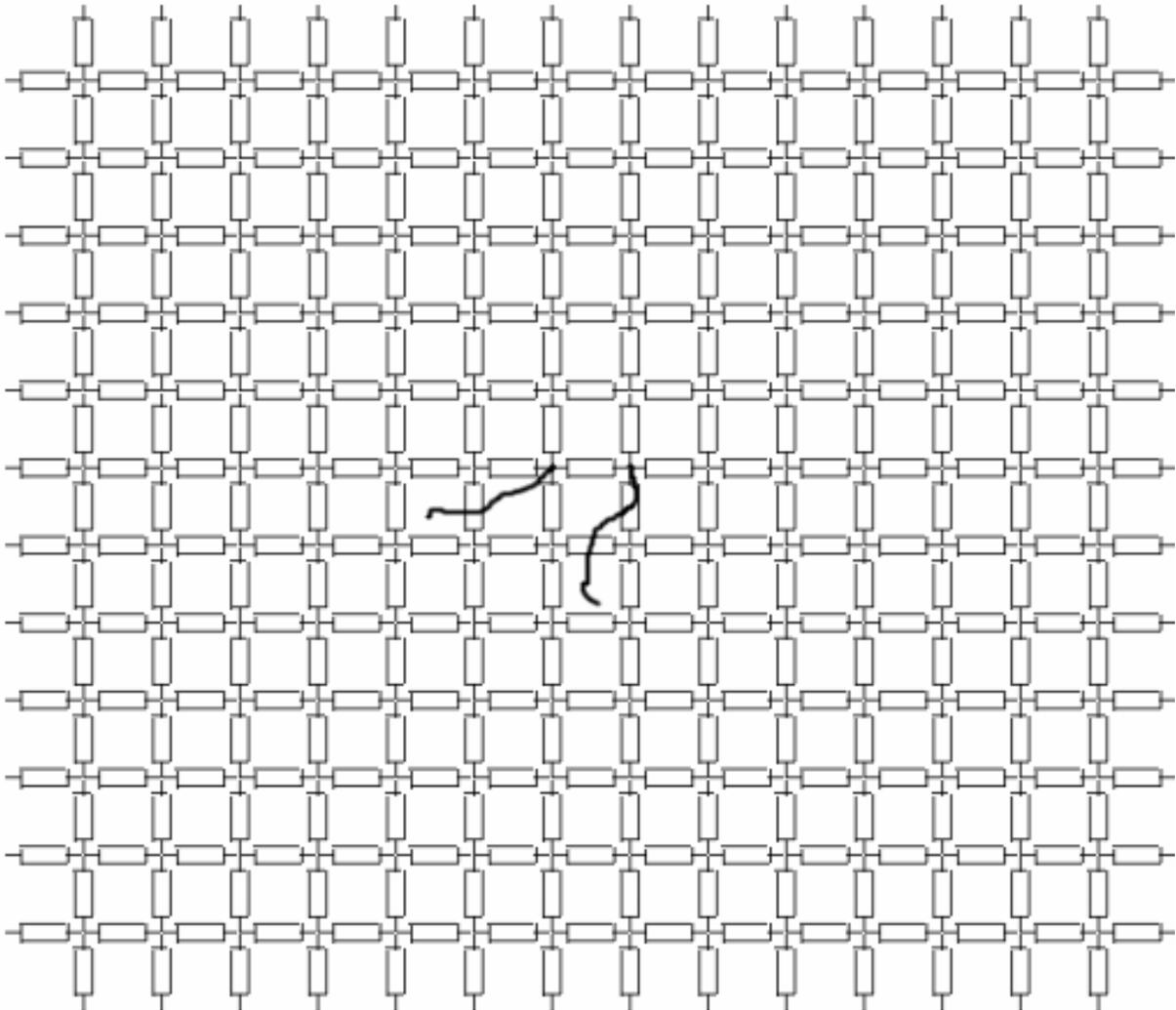
7. Par la méthode de votre choix, calculer les courants dans chacune des trois branches.



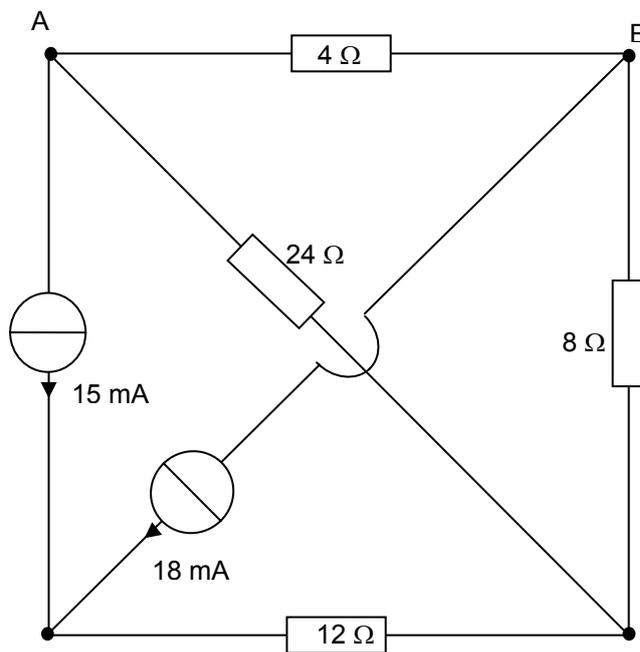
8. Calculer les courants dans chacune des trois branches.



9. On réalise, à l'aide de résistances identiques de R , une grille quadrilatère s'étendant à l'infini. Quelle résistance mesure-t-on entre deux fils placés aux bornes d'une résistance ?



10. Calculez la différence de potentiel V_{AB} , dans le schéma ci-dessous.



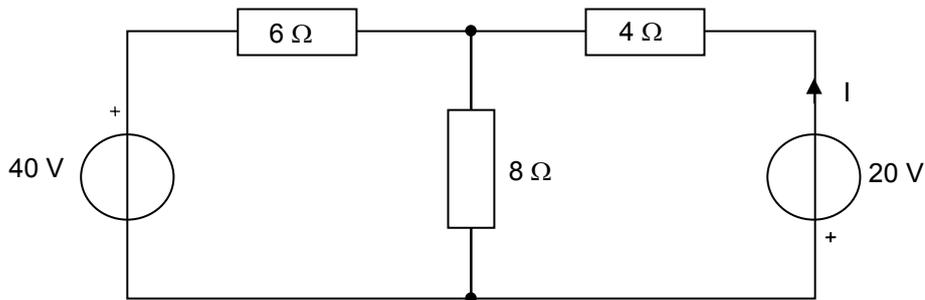
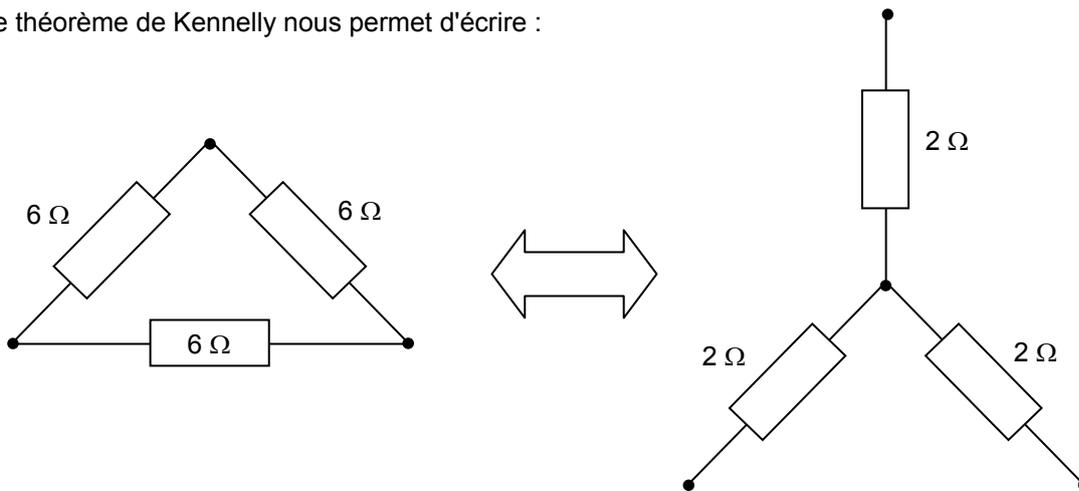
Solutions

$$1. \begin{cases} 8 - 3I - 6(I + J) = 0 \\ 10 - 3J - 6(I + J) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9I + 6J = 8 \\ 6I + 9J = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 \quad \Delta I = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 32 \quad \Delta J = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 42$$

$$I = \frac{32}{45} = \frac{4}{15} \text{ A}, \quad J = \frac{42}{45} = \frac{14}{15} \text{ A}, \quad I + J = \frac{4+14}{15} = \frac{18}{15} = 1,2 \text{ A}$$

2. Le théorème de Kennelly nous permet d'écrire :

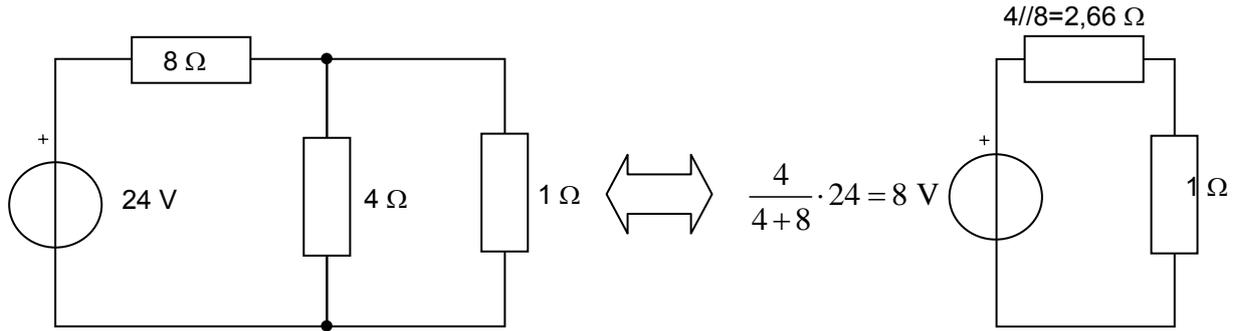


$$\begin{cases} 40 - 6J - 8(I + J) = 0 \\ 20 - 4I - 8(I + J) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8I + 14J = 40 \\ 12I + 8J = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4I + 7J = 20 \\ 3I + 2J = 5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad \Delta I = \begin{vmatrix} 20 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta J = \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -40$$

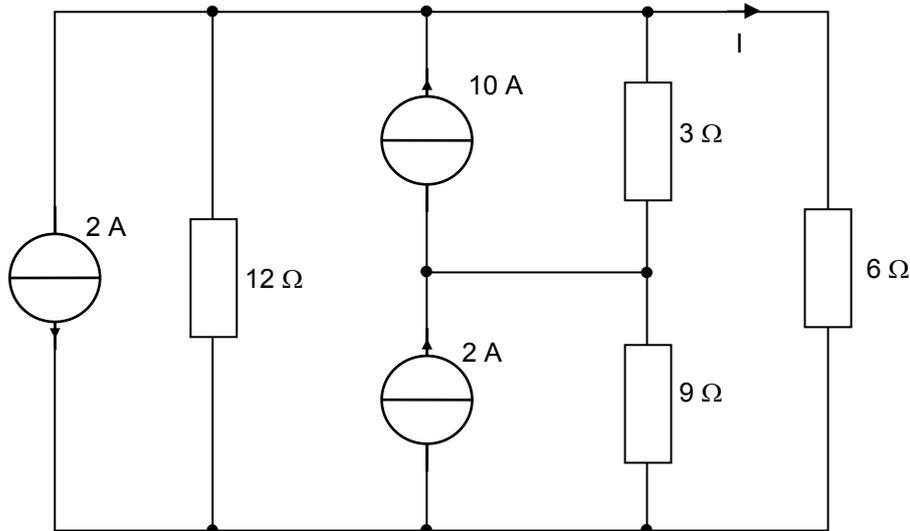
$$I = -\frac{5}{13} \text{ A}, \quad J = \frac{40}{13} \text{ A}, \quad I + J = \frac{35}{13} \text{ A}$$

3.

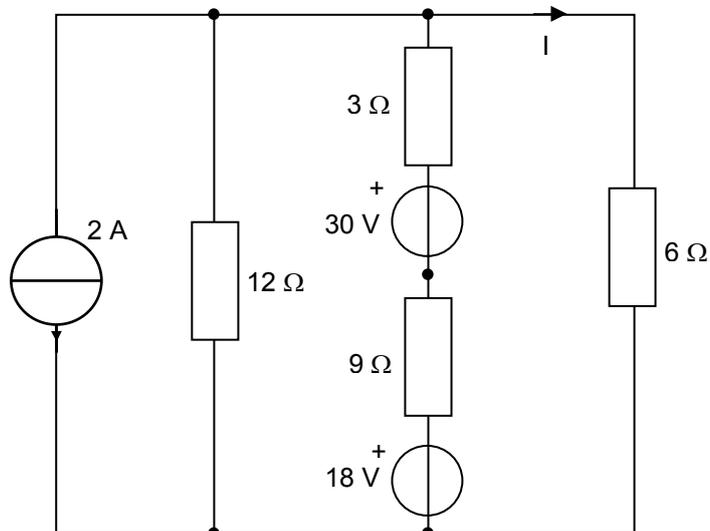


$$\Rightarrow I = \frac{8}{1 + \frac{8}{3}} = \frac{8}{11} \times 3 = \frac{24}{11} \text{ A}$$

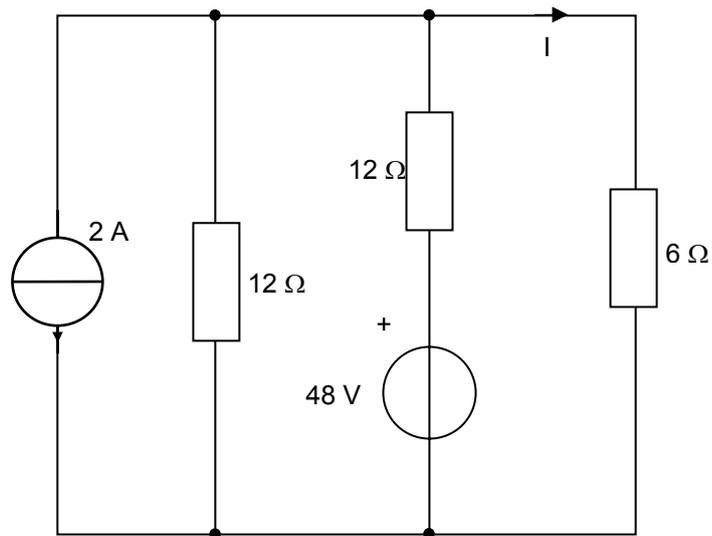
4. Lors d'une première étape, on regroupe les résistances de 12 et 4 Ω en parallèle entre elles et en parallèle avec le générateur de courant de 10 A. On les remplace par une résistance de 3 Ω. On effectue la même substitution pour les résistances de 90 et 10 Ω que l'on remplace par une résistance de 9 Ω. On obtient le schéma ci-dessous :



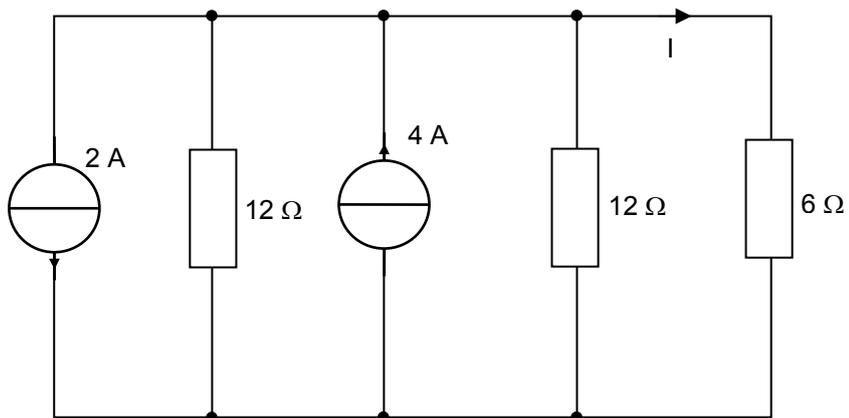
On remplace ensuite les générateurs de courant par leur équivalent sous forme de générateur de tension :



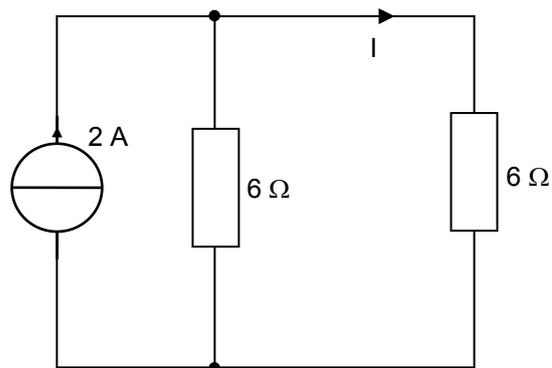
On remplace ensuite les deux générateurs de tension en série par un générateur de tension équivalent :



On remplace le générateur de tension par son équivalent sous forme de générateur de courant :

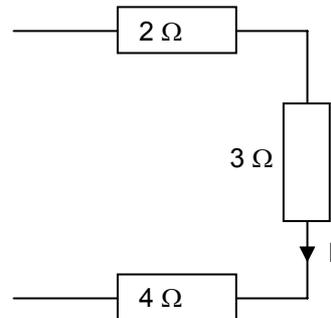
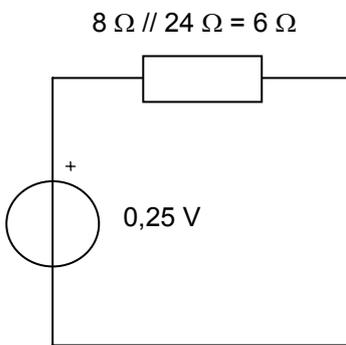
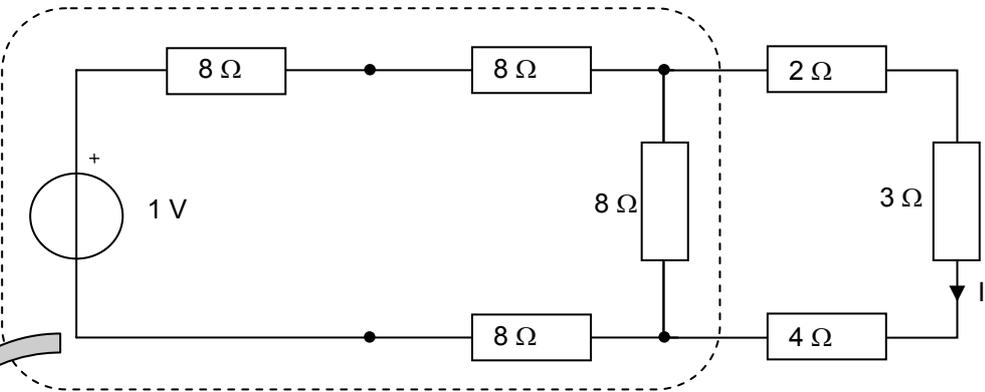
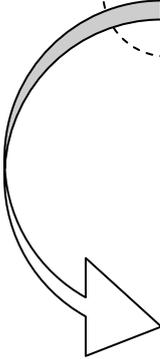
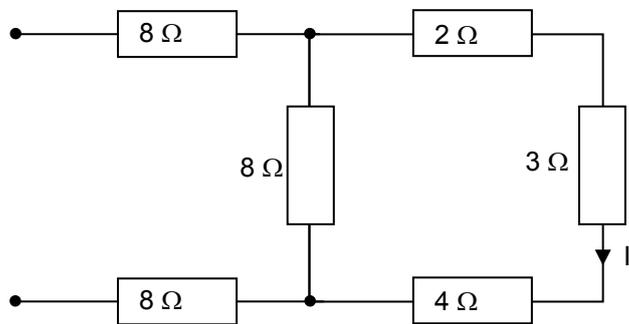
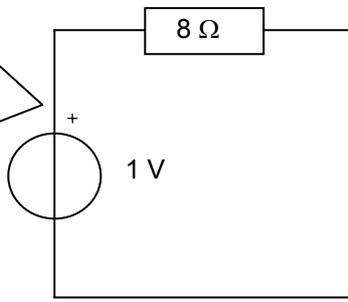
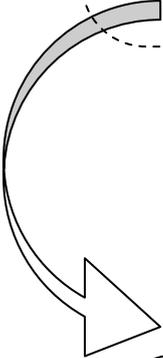
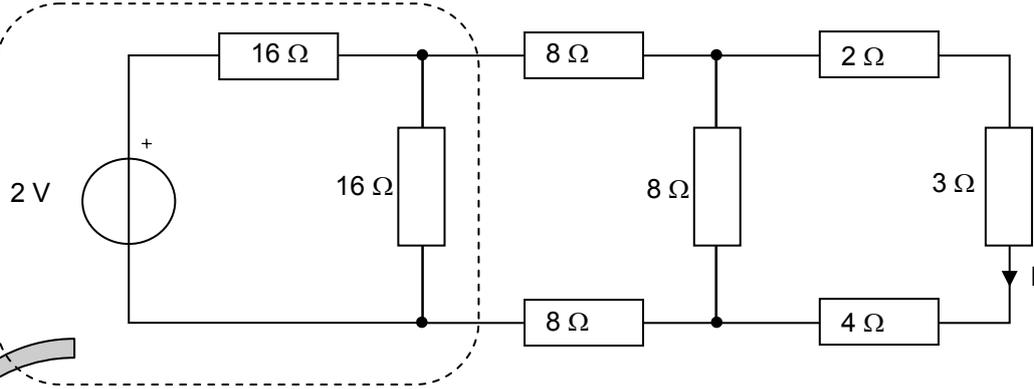


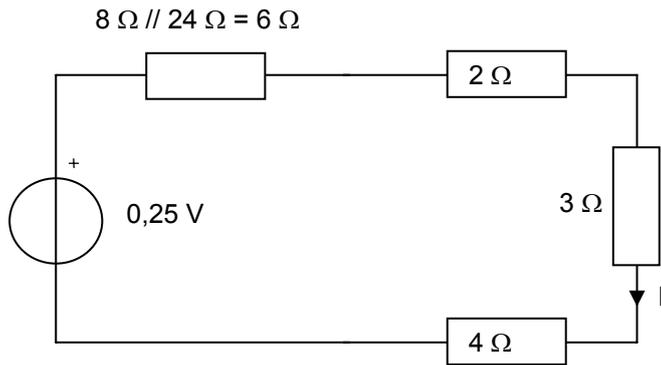
Enfin, on regroupe les générateurs de courants en un seul générateur équivalent :



Le courant I vaut la moitié de l'intensité fournie par le générateur de courant (débit dans deux résistances identiques) soit 1 A.

5.

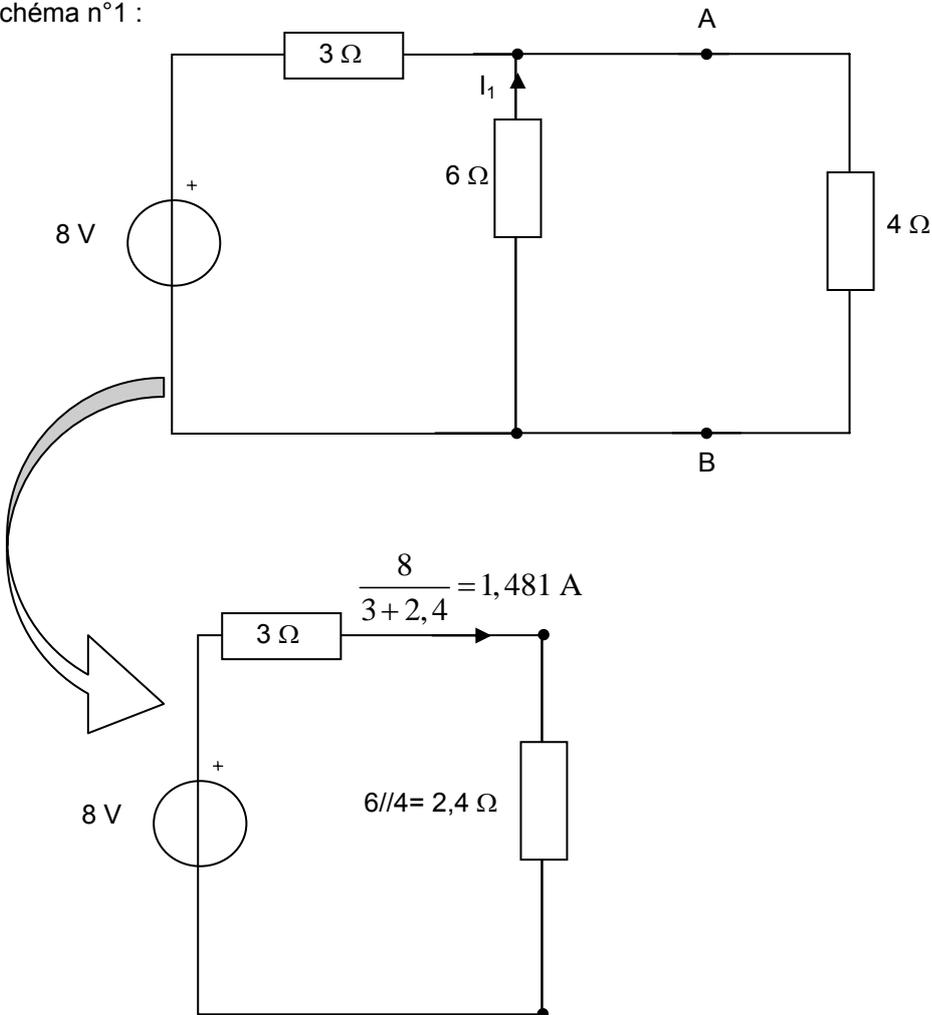




$$I = \frac{0.25}{6+2+3+4} = 16,66 \text{ mA}$$

6. Il faut dessiner autant de schémas qu'il y a de sources, en prenant soin d'éteindre toutes les sources sauf une. On calcule une intensité pour chaque schéma. L'intensité cherchée sera la somme de ces intensités intermédiaires.

schéma n°1 :

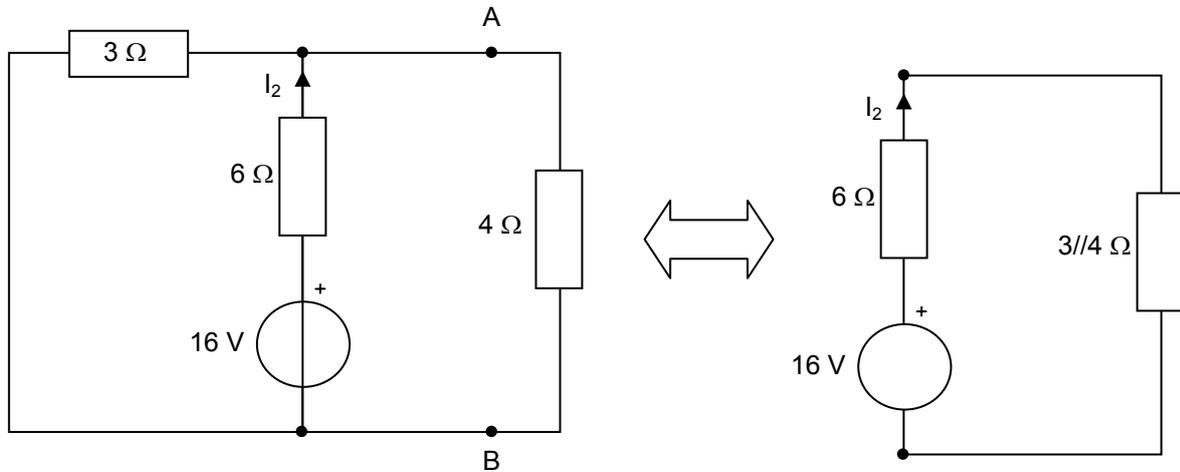


La formule du diviseur de courant nous permet de déterminer I_1 :

$$I_1 = -1,481 \times \frac{4}{6+4} = -0,5924 \text{ A} .$$

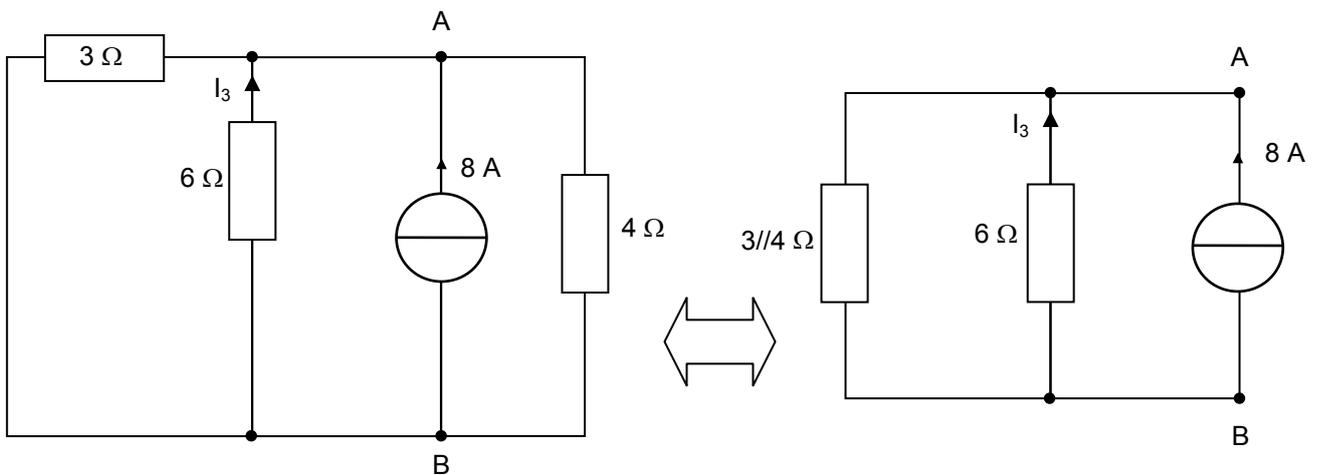
Le signe moins provient du fait que le courant I cherché va du bas vers le haut de la figure, nous avons choisi le même sens pour I_1 .

schéma n°2 :



Ainsi, $I_2 = \frac{16}{6 + (3//4)} = 2,07407 \text{ A}$

schéma n°3 :



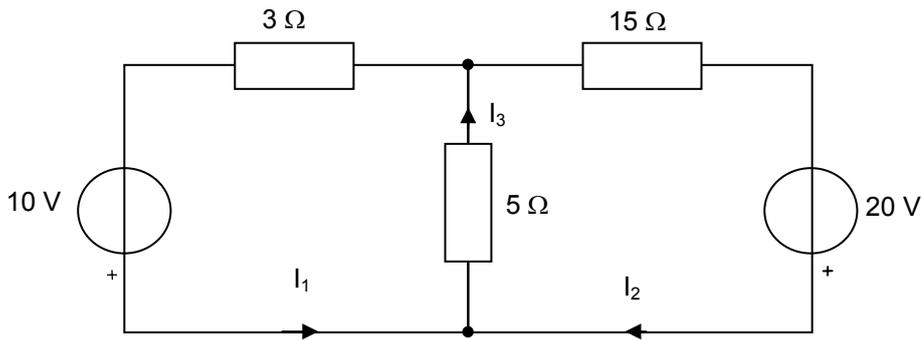
La formule du diviseur de courant nous permet de calculer I_3 :

$I_3 = -8 \times \frac{(3//4)}{(3//4) + 6} = -1,77777 \text{ A}$, étant donné le sens du débit des 8 A, I_3 circulera du haut vers le bas et sera donc négatif.

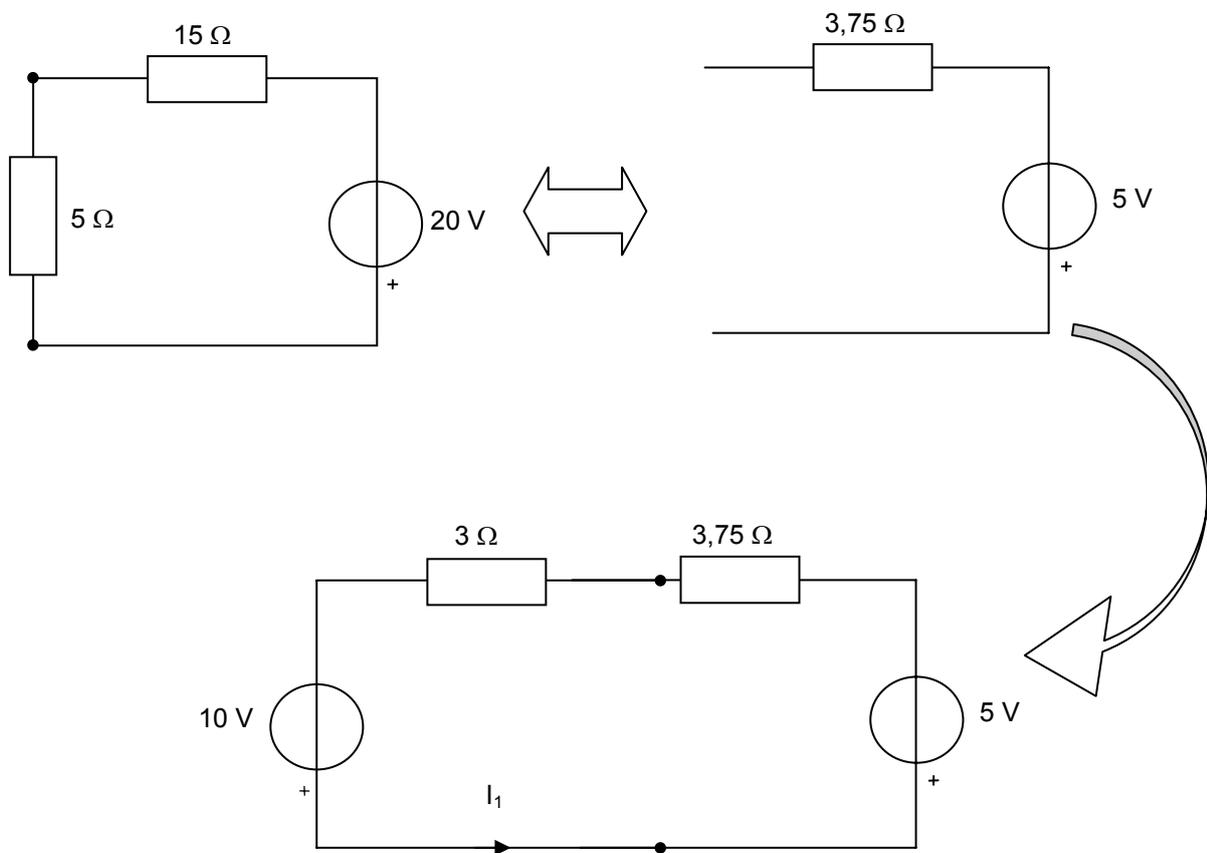
L'application du principe de superposition permet d'écrire :

$I = I_1 + I_2 + I_3 = -0,5924 + 2,07407 - 1,7777 = -0,296 \text{ A}$

7. Résolvons l'exercice par la méthode de Thevenin. Numérotons les courants dans les branches :

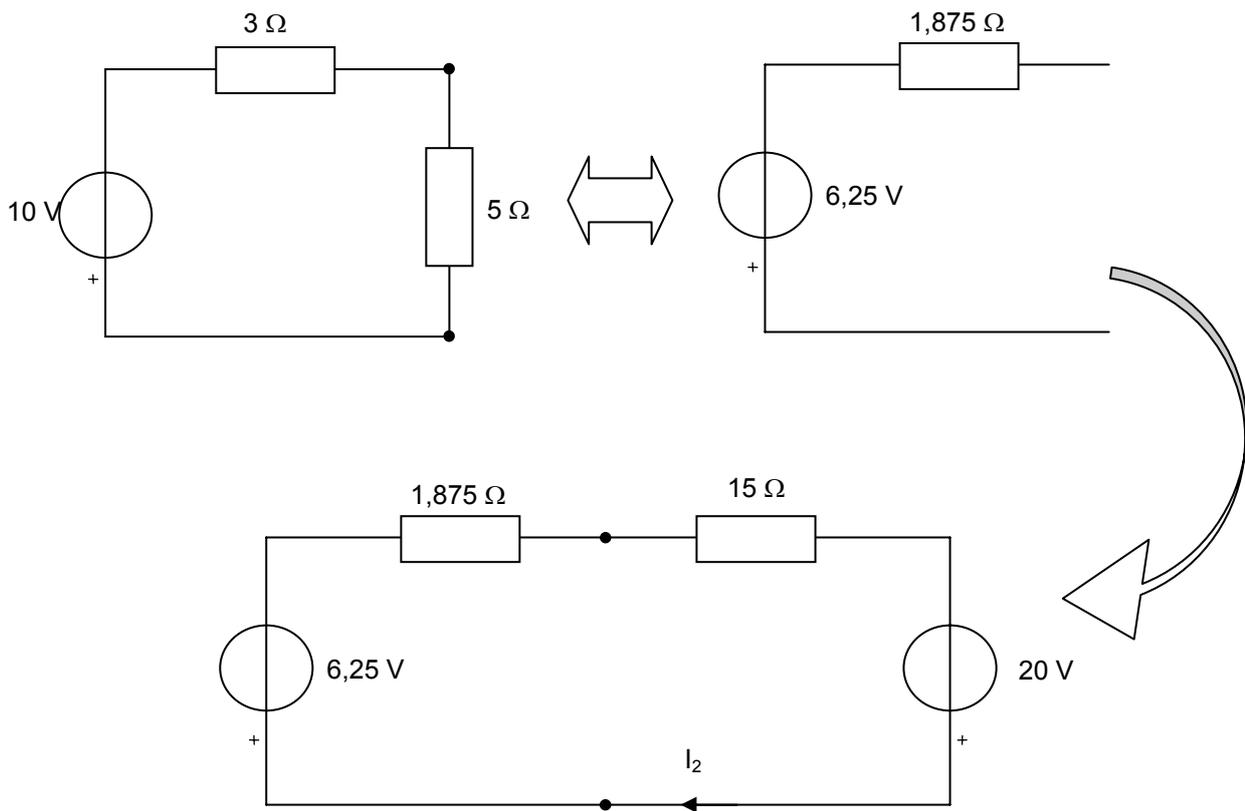


Déterminons I_1 , pour cela nous remplacerons la maille de droite par un générateur de Thevenin équivalent :



L'équation de maille permet d'écrire :
$$I_1 = \frac{10 - 5}{3 + 3,75} = 0,74 \text{ A}$$

Déterminons I_2 , pour cela nous remplacerons la maille de gauche par un générateur de Thevenin équivalent :

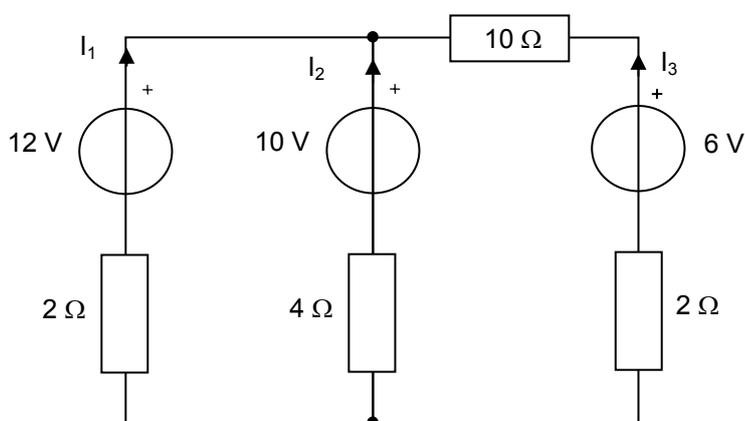


L'équation de maille permet d'écrire $I_2 = \frac{20 - 6,25}{15 + 1,875} = 0,819 \text{ A}$

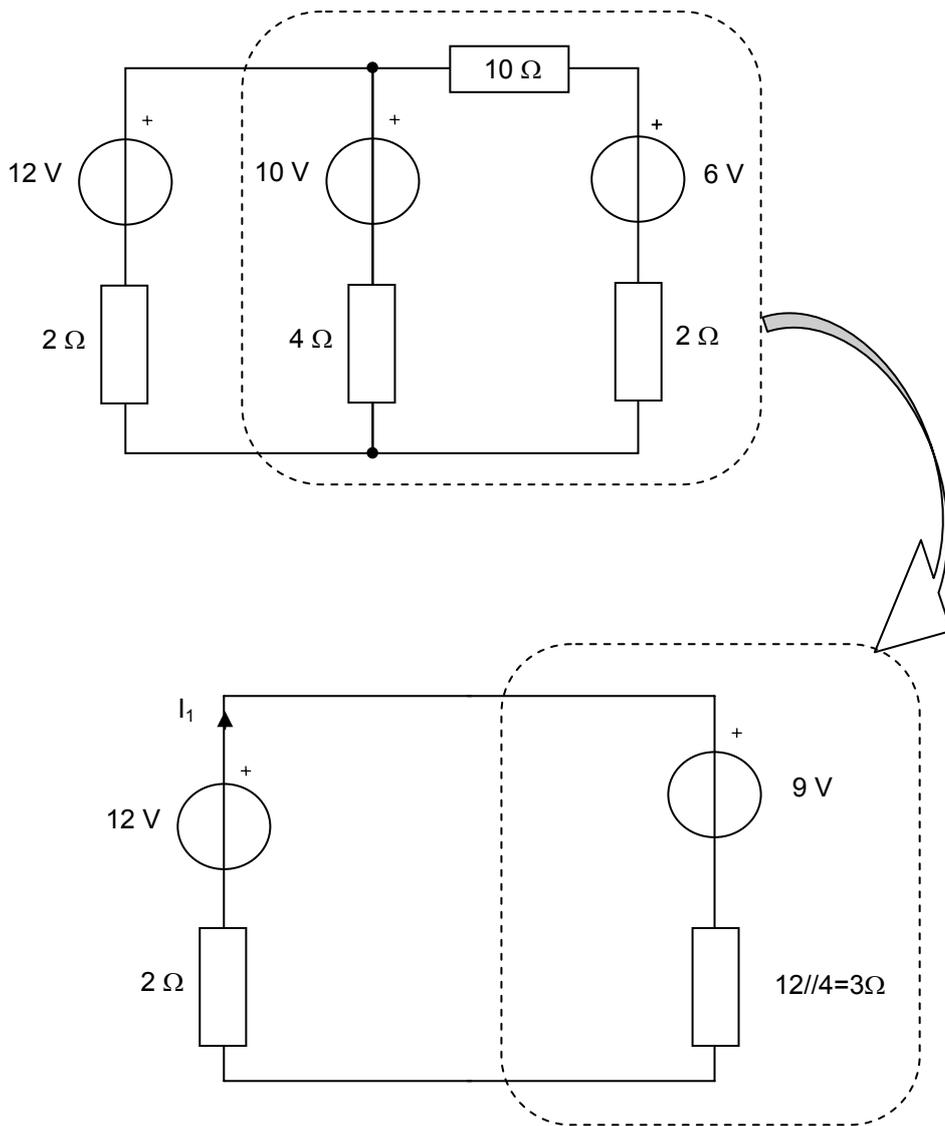
L'équation au nœud inférieur du schéma de départ permet d'écrire :

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0,819 + 0,74 = 1,55 \text{ A}$$

8. Là encore, une résolution par Thevenin est plus rapide qu'une résolution par Kirchhoff.

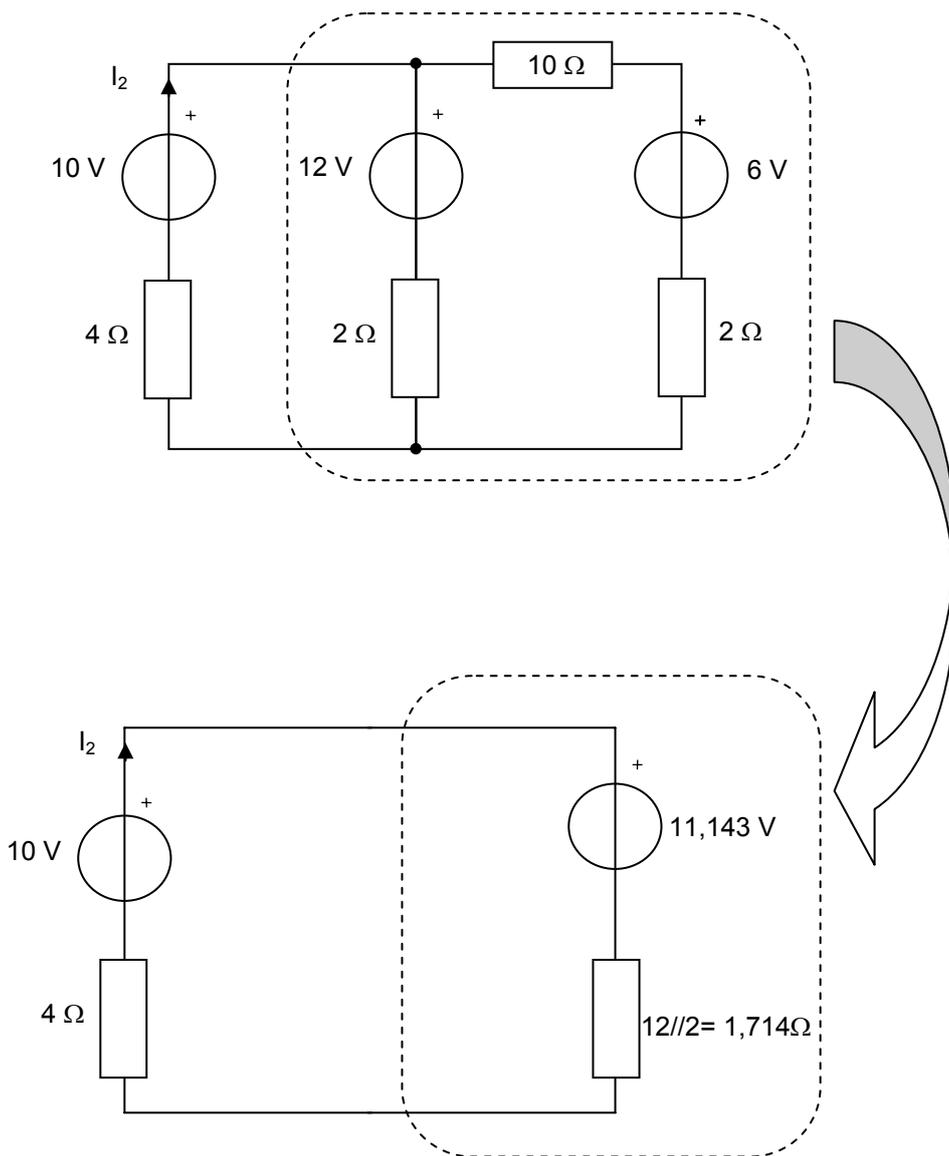


Calcul de I_1 :



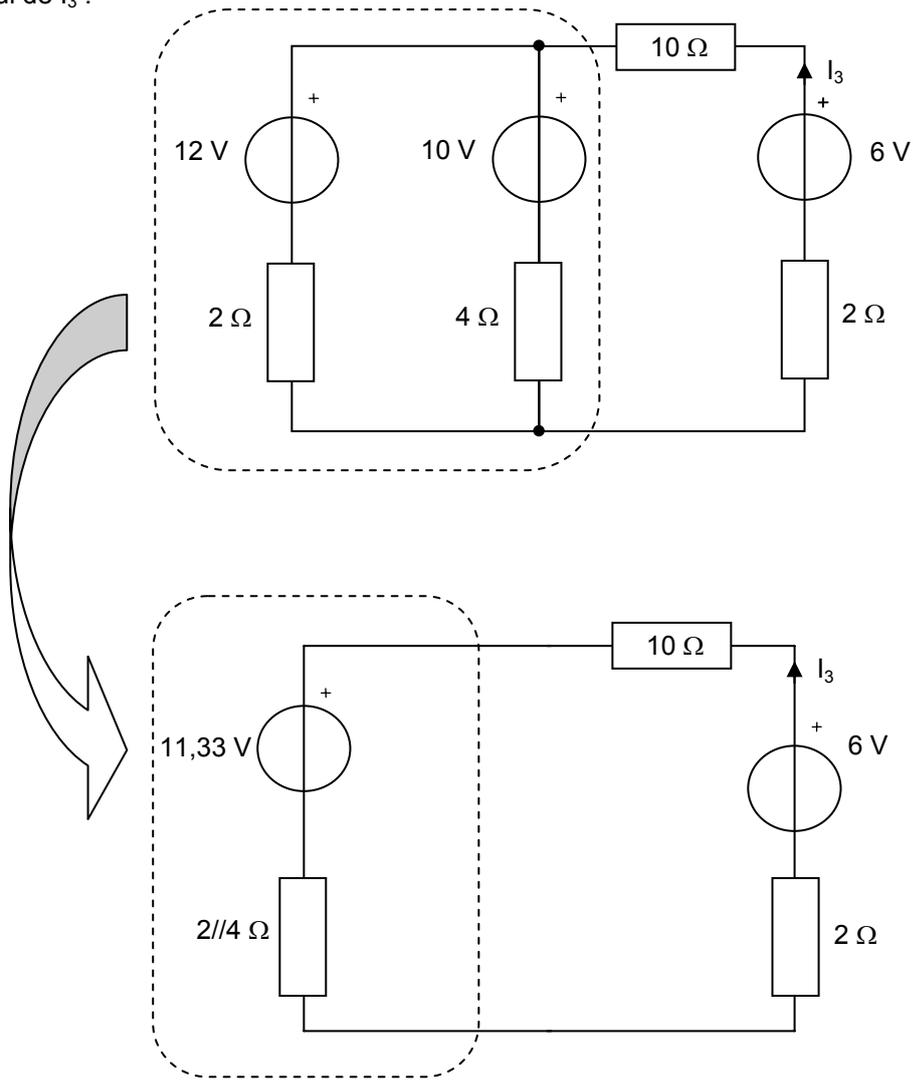
$$I_1 = \frac{12-9}{2+3} = 0,6\text{ A}$$

Calcul de I_2 :



$$I_2 = \frac{10 - 11,1429}{4 + 1,714} = -0,2 \text{ A} , \text{ le courant } I_2 \text{ descend donc du haut vers le bas sur le schéma.}$$

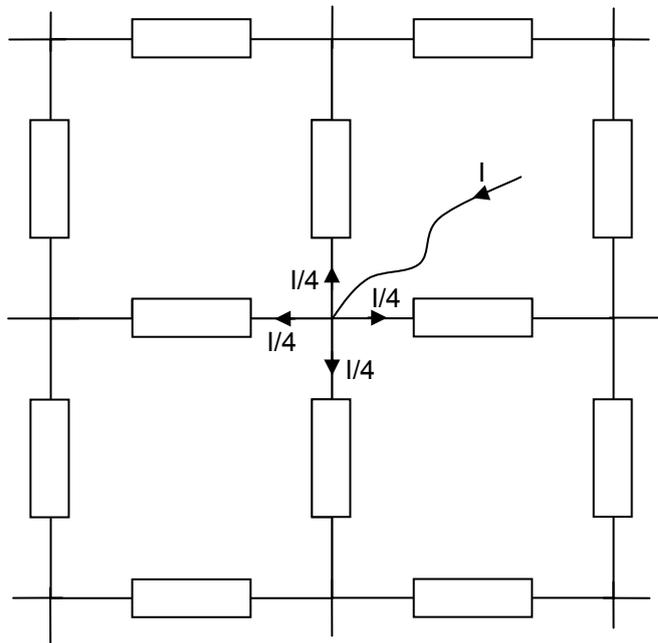
Calcul de I_3 :



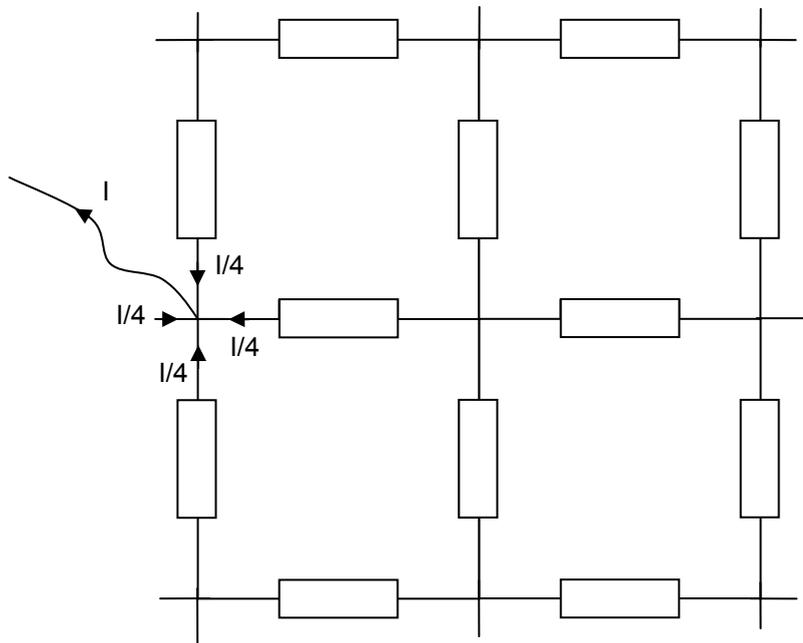
$$I_3 = \frac{6 - 11,333}{10 + 2 + (2 // 4)} = -0,40 \text{ A}, \text{ ici également, le courant } I_3 \text{ circule dans le sens contraire de la flèche.}$$

9. On utilise le principe de superposition :

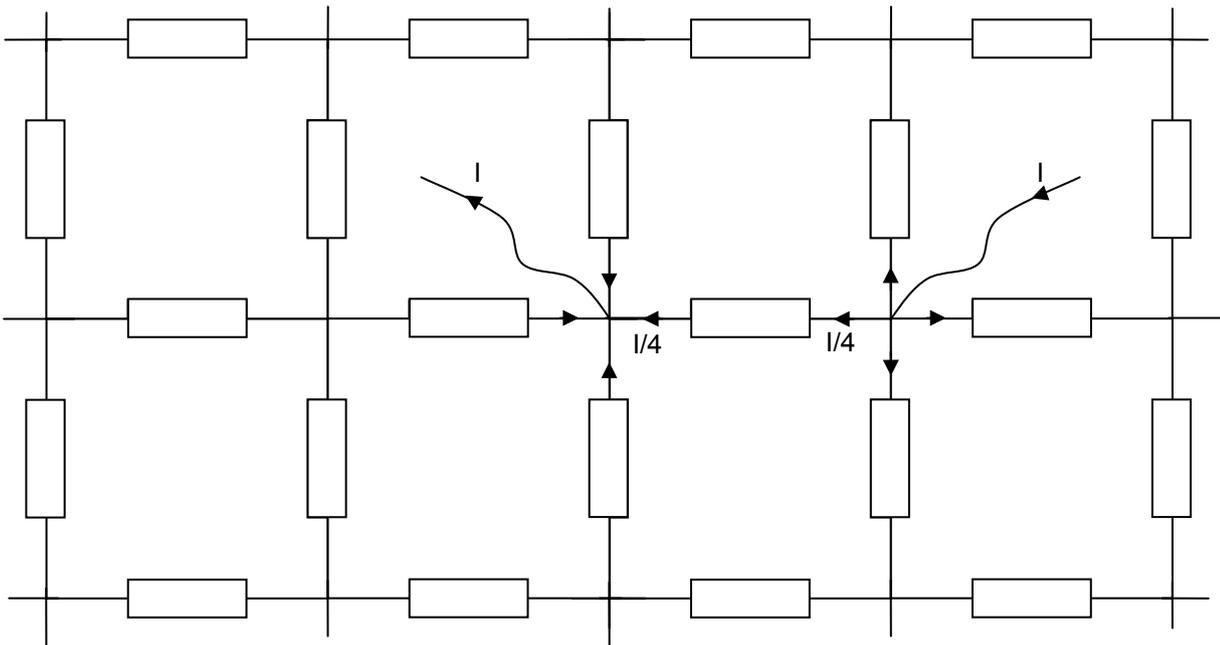
Etape n°1 : on injecte le courant et on le récupère par un fil situé sur le pourtour à l'infini. La symétrie du système veut que le courant se sépare du nœud d'injection en 4 intensités égales.



Etape n°2 : On injecte une intensité identique à la précédente, depuis le pourtour situé à l'infini. On le récupère par un nœud voisin du précédent. La symétrie du système fait que 4 intensités égales arrivent au nœud.



Le système complet est la superposition des étapes 1 et 2 :



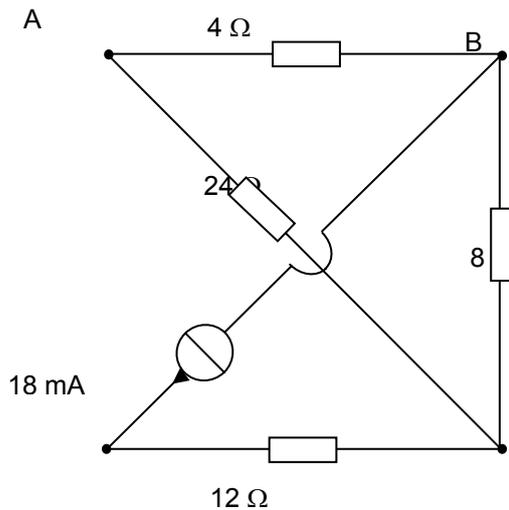
Ainsi, en appelant E la d.d.p. imposée entre les deux nœuds on a :

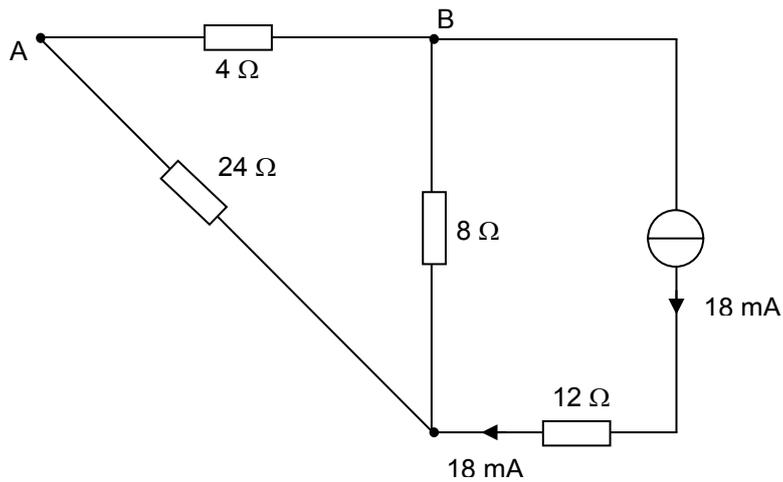
$$E = R \cdot \frac{I}{4} + R \cdot \frac{I}{4} = R \cdot \frac{I}{2} = R_{eq} \cdot I \Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R}{2}}$$

10. Par le principe de superposition :

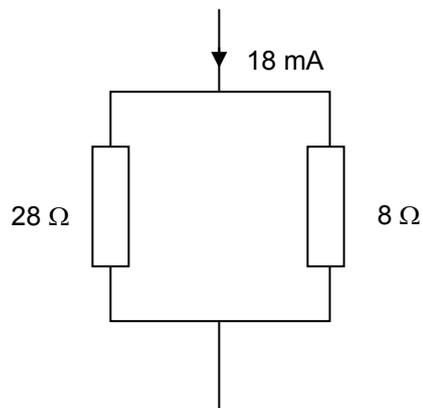
Il y a deux générateurs, il faut donc extraire deux sous-circuits, calculer V_{AB} pour chacun d'eux et en faire la somme algébrique.

Sous circuit n°1 :





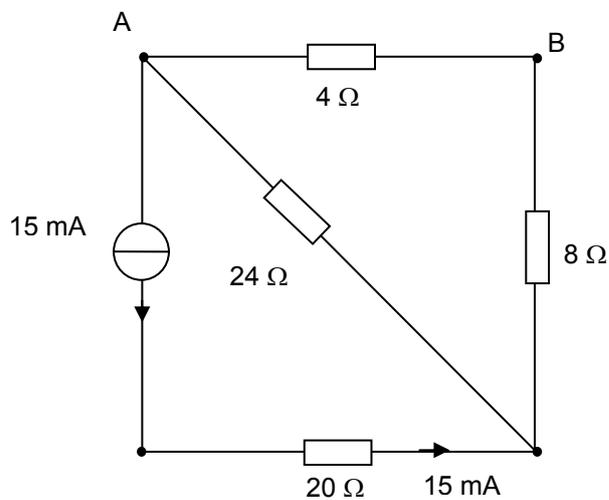
Le courant de 18 mA se divise dans le diviseur constitué de la résistance de 8 Ω d'une part et des résistances de 24 et 4 Ω en série d'autre part :



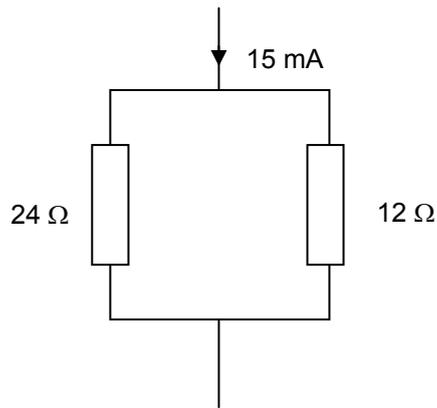
L'intensité dans les résistances de 24 et 4 Ω est : $18 \times \frac{8}{28+8} = 4 \text{ mA}$

Ainsi, $V_{AB} = +16 \text{ mV}$ dans ce premier circuit.

Sous circuit n°2 :



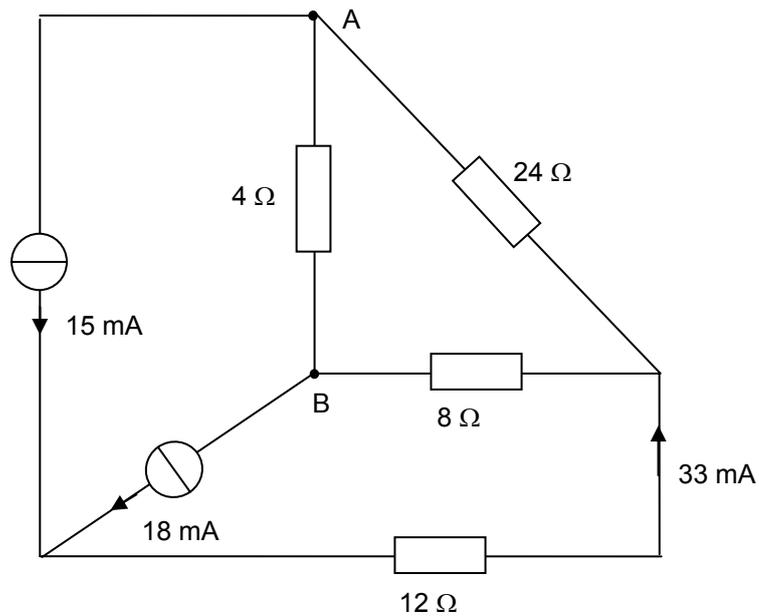
L'intensité de 15 mA traverse le diviseur de courant constitué de la résistance de 24 Ω en parallèle avec les résistances de 8 et de 4 Ω en série :



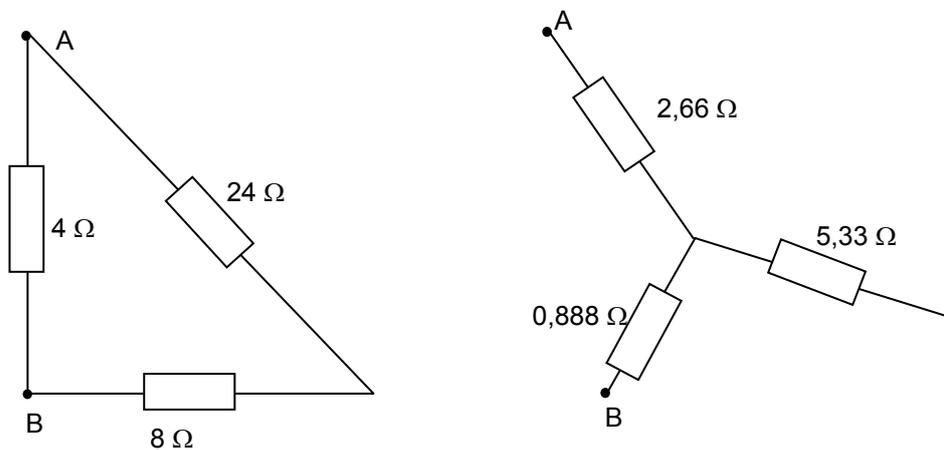
Soit une intensité de : $15 \times \frac{24}{24+12} = 10 \text{ mA}$ et donc pour ce sous circuit, $V_{AB} = -40 \text{ mV}$ (attention au sens du courant !).

Lorsque l'on superpose les deux circuits, on a $V_{AB} = +16 - 40 = -24 \text{ mV}$

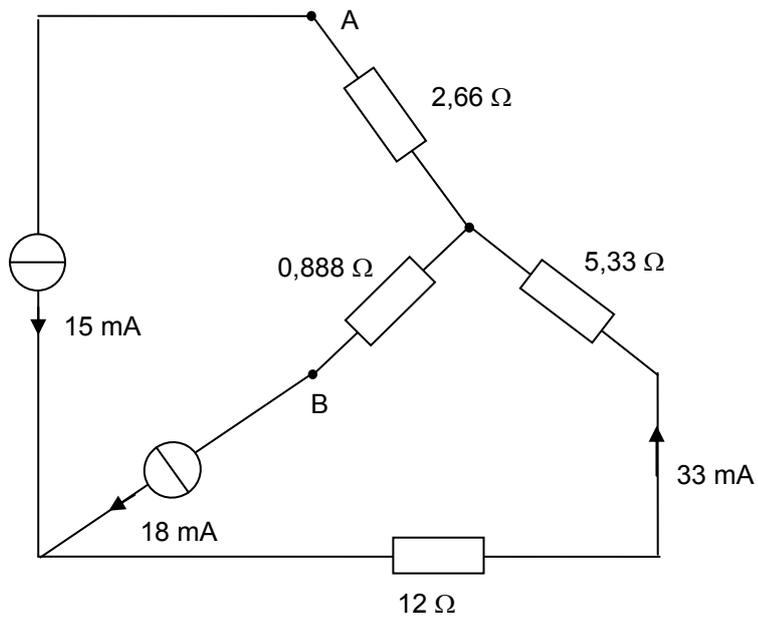
Deuxième solution par Kennely, on redessine la figure :



Le triangle se transforme en étoile :



Le circuit se transforme en :



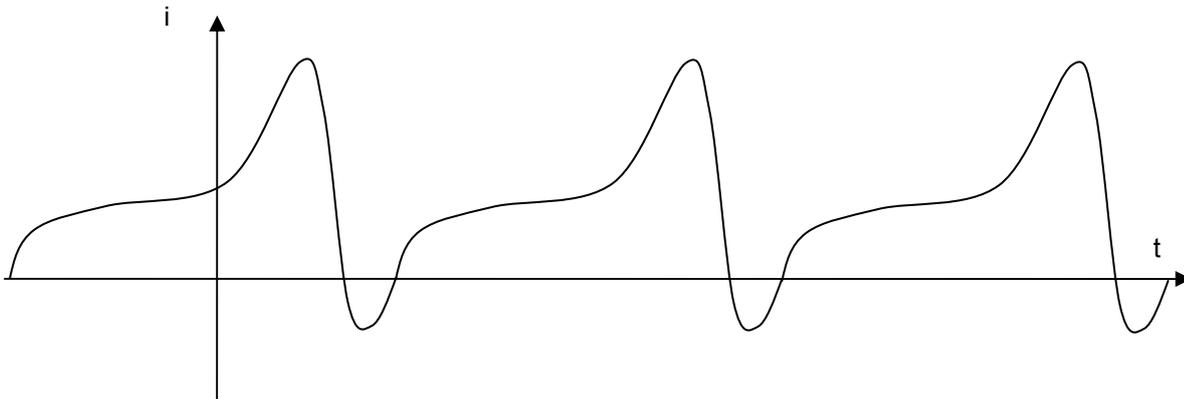
$$V_{AB} = 0,888 \times 18 \cdot 10^{-3} - 2,66 \times 15 \cdot 10^{-3} = 24 \text{ mV}$$

Le courant alternatif

On appelle courant alternatif, un courant périodique du temps (période T)

$$i = f(t) = f(t + nT) \text{ quelque soit } n.$$

L'intensité instantanée d'un courant alternatif s'annule à certains instants et change de signe.



Afin de bien fixer les idées, voici quelques ondes de tensions ou courants continus et alternatifs :

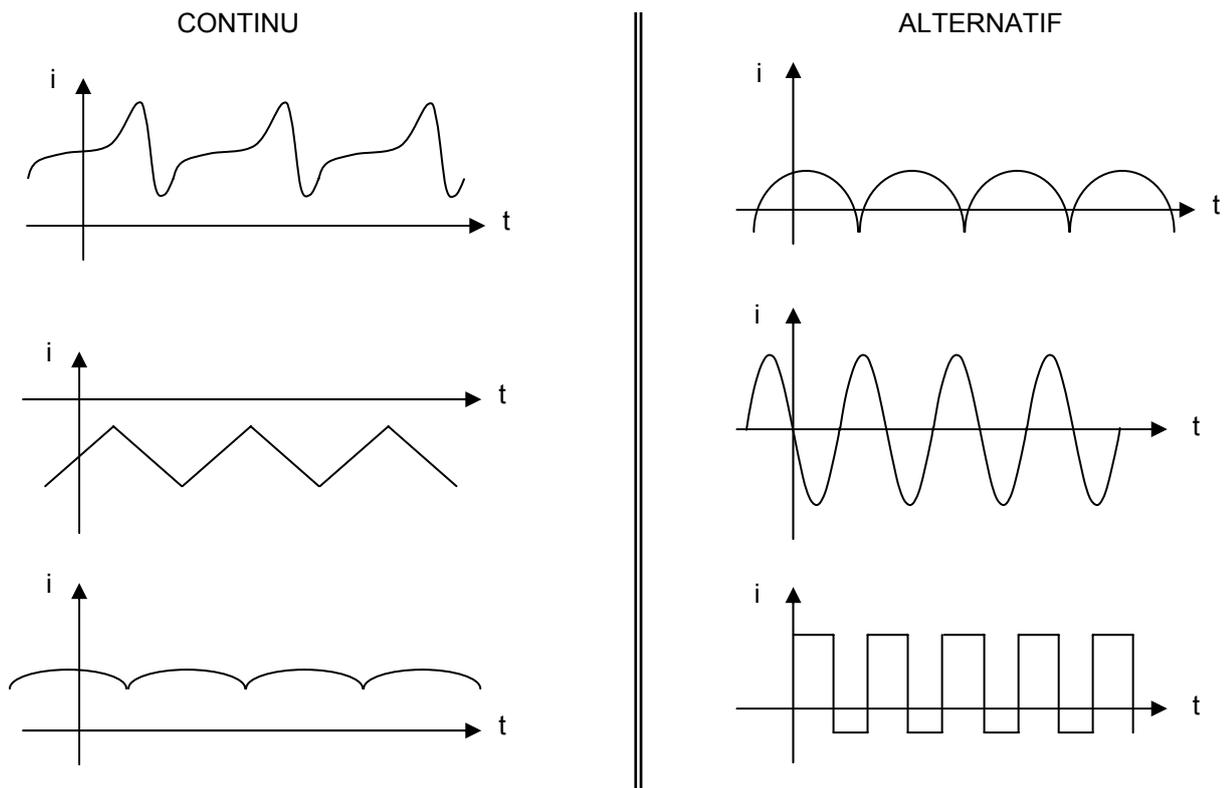


Figure 19

Etude des courants non sinusoïdaux :

Toute fonction périodique peut être décomposée en une somme de fonctions sinusoïdales de périodes $T, \frac{T}{2},$

$$\frac{T}{3}, \dots, \frac{T}{n}, \dots$$

$$f(t) = A_0 + \sum_1^n A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (1.1)$$

Par conséquent, on est amené à étudier le comportement d'un courant alternatif sinusoïdal et éventuellement celui de ses harmoniques (application du théorème de superposition des états électriques).

Pourquoi l'industrie a-t-elle choisit de produire des ondes alternatives sinusoïdales plutôt que des ondes carrées, triangulaires ou autres ? Voici quelques éléments de réponse :

- Dans les machines à courant alternatif, c'est l'onde sinusoïdale de tension qui occasionne le moins de pertes. Le rendement est donc meilleur.
- Une onde sinusoïdale de tension ou de courant produit moins d'interférence, de parasites (bruit) sur les lignes téléphoniques passant à proximité où dans des dispositifs électroniques voisins.
- Dans les circuits à courant alternatif, une tension sinusoïdale produit un courant sinusoïdal et vice-versa. C'est la seule onde possédant cette propriété de se « reproduire ».
- Dans les moteurs électriques, un flux variant sinusoïdalement produit moins de bruit. De plus, le couple durant le démarrage est plus régulier.

Fréquence du courant $f = \frac{1}{T}$ avec f en Hertz (Hz) et T en secondes.

Intensité moyenne : i_m

C'est la valeur moyenne de l'intensité sur un nombre entier de période :

$$i_m = \frac{1}{nT} \int_t^{t+nT} i(t) dt \quad (1.2)$$

Dans le cas du courant alternatif sinusoïdal, on a $i_m = 0$. La notion de valeur moyenne (courant moyen, tension moyenne) n'est pas pertinente en alternatif sinusoïdal.

Intensité efficace, tension efficace :

A l'intérieur d'un intervalle de temps très petit, dt , le courant alternatif peut être considéré comme constant. On peut donc lui appliquer les lois d'Ohm et de Joule, à condition de considérer les valeurs instantanées. Dans le cas d'une résistance pure : $u = R \cdot i$, la quantité d'énergie calorifique dissipée dans la résistance R pendant le temps dt est donnée par :

$$dW = R \cdot i^2 \cdot dt$$

Pendant une période, l'énergie dissipée sera donc :

$$W_T = \int_0^T R \cdot i^2 \cdot dt = R \cdot I_0^2 \cdot T \quad (1.3)$$

Cette énergie est la même que celle que dissiperait un courant constant I_0 pendant le même intervalle de temps T . D'où :

$$I_0^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (1.4)$$

On dit que I_0 est l'intensité efficace du courant i :

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (1.5)$$

C'est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de l'intensité instantanée sur une période. De la même manière, par extension, la tension efficace est donnée par :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad (1.6)$$

La Figure 20 montre que si un « sinus » possède une valeur moyenne nulle, un « sinus² » est une courbe située au-dessus de l'axe des abscisses qui, par conséquent, possède une valeur moyenne non nulle. La racine carrée de cette valeur moyenne constitue la valeur efficace.

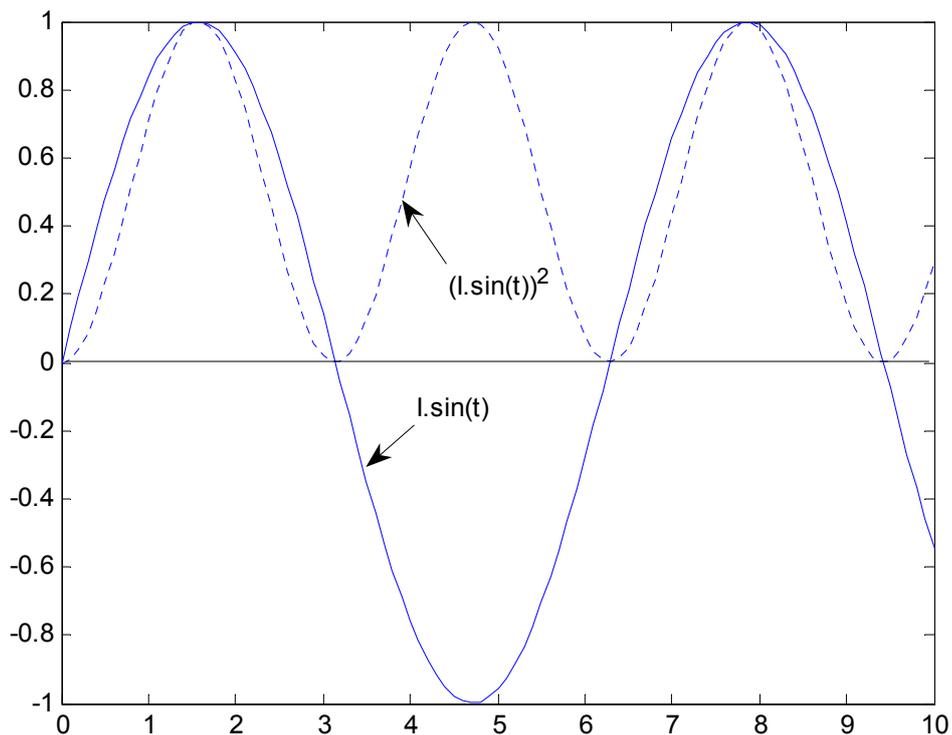


Figure 20

On rappelle l'égalité : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

Pour une onde sinusoïdale, il vient :

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_{max}^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{I_{max}^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{I_{max}^2}{2T} \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t) dt \right]$$

$$= \frac{I_{max}^2}{2T} \left([t]_0^T - \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2} \right]_0^T \right) = \frac{I_{max}^2}{2T} (T - 0) = \frac{I_{max}^2}{2}$$

De même, si $u = U_{max} \sin(\omega t + \varphi)$, on obtient $U_{eff}^2 = \frac{U_{max}^2}{2}$

Soit : $I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ et $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ (1.7)

Le courant efficace est un courant continu (constant dans le temps) qui produit les mêmes effets calorifiques que son équivalent alternatif. Considérons, par exemple, un four chauffé par des résistances électriques, d'une puissance maximum de 3 kW, alimenté normalement en 220 V, 50 Hz. Ce four produirait la même puissance maximale en étant alimenté par une tension continue de 220 V, il serait alors traversé par un courant continu de $3000/220 = 13,63$ A. Un voltmètre et un ampèremètre indiqueraient ces valeurs si le four était alimenté par une tension alternative de 220 V.

Tous les ampèremètres et tous les voltmètres sont toujours gradués en valeurs efficaces.

Hypothèse du courant sinusoïdal industriel

Considérons un courant sinusoïdal $i = I_{max} \sin(\omega t + \varphi)$ ou ω est la pulsation du courant telle que :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Longueur d'onde : L'intensité i donne naissance à un champ magnétique sinusoïdal. Tout champ alternatif se propage par onde électromagnétique dont la longueur d'onde est :

$$\lambda = \frac{C}{f} = C \cdot T \quad (1.8) \text{ avec } C = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s (vitesse de la lumière).}$$

Il en résulte un phénomène d'ondes stationnaires, si on considère la propagation de l'onde le long des fils du circuit (expérience des fils de Lecher).

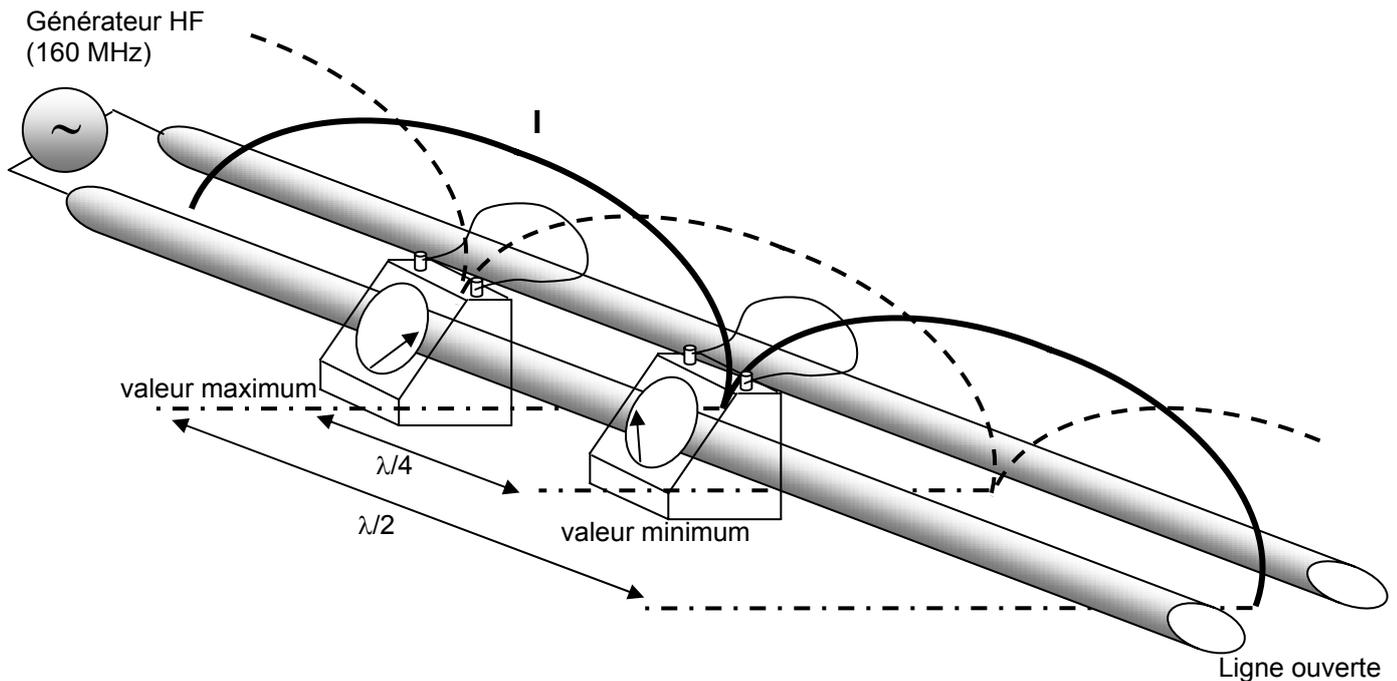


Figure 21

Expérience des fils de Lecher¹ : On branche un oscillateur haute fréquence (couramment 150 MHz) entre deux fils ou deux tubes métalliques. L'indicateur de courant (une boucle de fil de cuivre relié à un voltmètre ou à un ampèremètre) est placé au-dessous des fils, et la distance entre la spire de l'indicateur et les fils est ajustée de sorte que l'indicateur enregistre une déviation maximum. Puis, on déplace lentement l'indicateur le long de la ligne, et on note les points où le courant atteint des valeurs maxima. La distance entre deux valeurs de crête successives du courant est égale à une demie longueur d'onde.

On peut aussi montrer la position des crêtes de courant en se servant d'un néon. Cette expérience montre que des ondes stationnaires s'établissent le long des fils. Cette expérience possède une suite qui n'illustre plus notre propos, nous n'en dirons pas plus.

En 50 Hertz, $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 = 6000 \text{ km}$.

Si nous considérons une ligne haute tension monophasée Paris Arkhangelsk, lorsque la d.d.p. est nulle à Paris, elle est approximativement nulle au même instant à Moscou, mais maximum à Berlin !

On peut couramment négliger les phénomènes de propagation de l'onde (approximation des états quasi stationnaires) sauf si l'on s'intéresse à de très longues lignes de transport de l'électricité.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que la longueur d'onde est très grande devant les dimensions des circuits considérés, ce qui revient à dire que nous limiterons notre étude au cas des fréquences relativement basses (pas plus de quelques centaines d'hertz) et à des circuits de dimensions petites vis-à-vis de la longueur d'onde.

¹ Ernst LECHER (1856-1926), né à Vienne, il a effectué des recherches sur la calorimétrie et le rayonnement thermique à l'université de Vienne. Ces recherches l'ont amené à s'intéresser aux ondes électromagnétiques puisque la lumière visible et infrarouge rayonnée par les corps chauds pouvait être considérée comme étant de nature électromagnétique.

Représentation d'un courant sinusoïdal : représentation vectorielle et notation imaginaire

Considérons le courant sinusoïdal $i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ avec $\omega = 2\pi f$, ω s'exprime en radians/seconde et f en Hertz.

On appelle phase, la quantité $\varphi = \omega t + \varphi_0$, φ_0 est le déphasage initial (pour $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$).

Une phase initiale négative déplace la courbe vers les temps positifs. Sur la Figure 22, le $\sin(t - 30^\circ)$ est déplacé vers la droite.

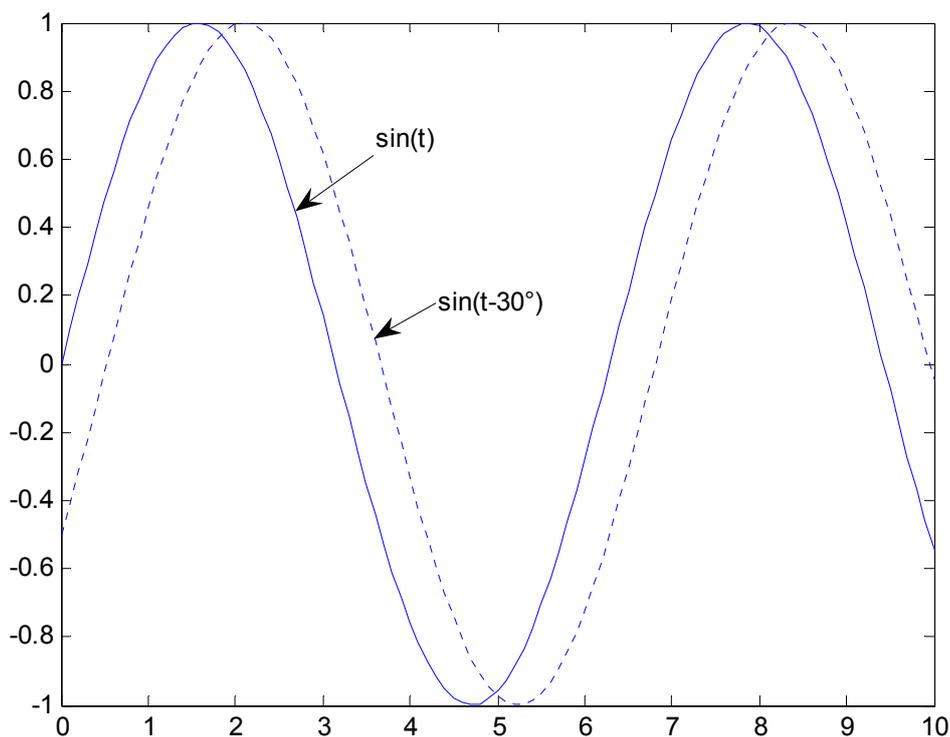


Figure 22

Une phase initiale positive déplace la courbe vers les temps négatifs. Sur la Figure 23, $\sin(t+30^\circ)$ est déplacé vers la gauche.

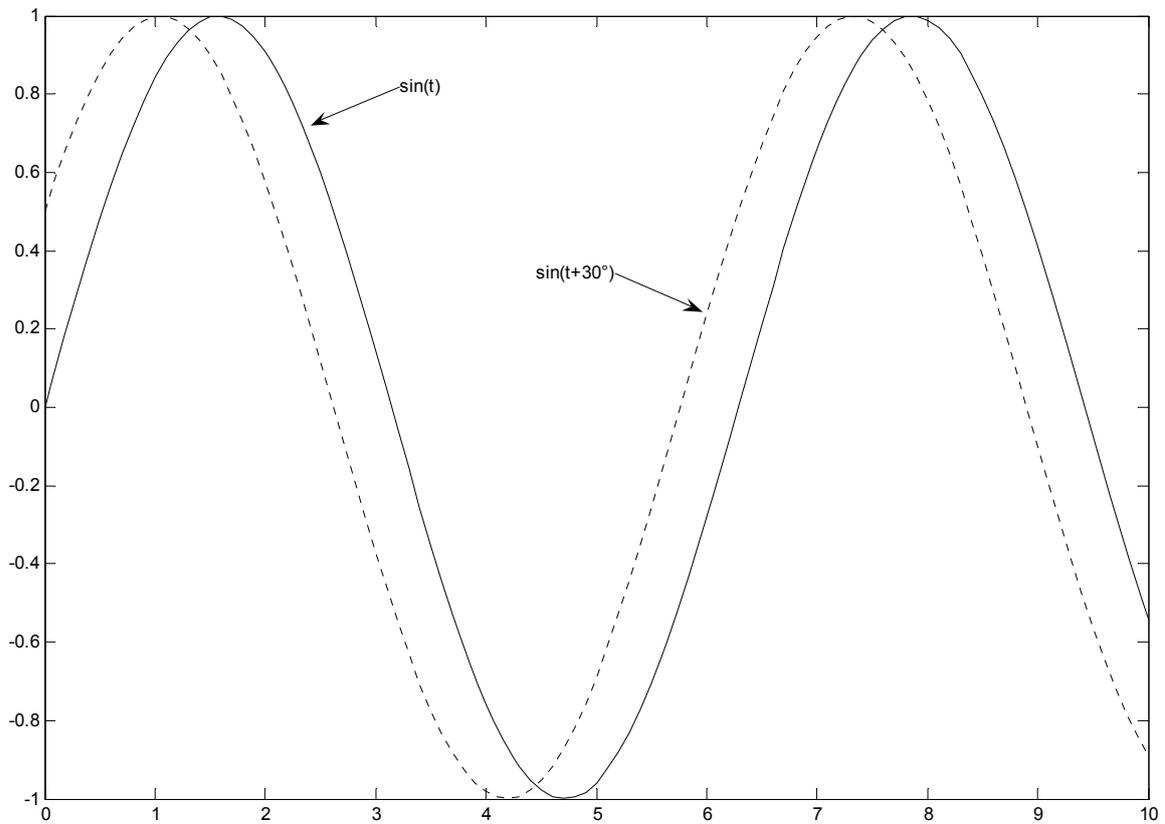


Figure 23

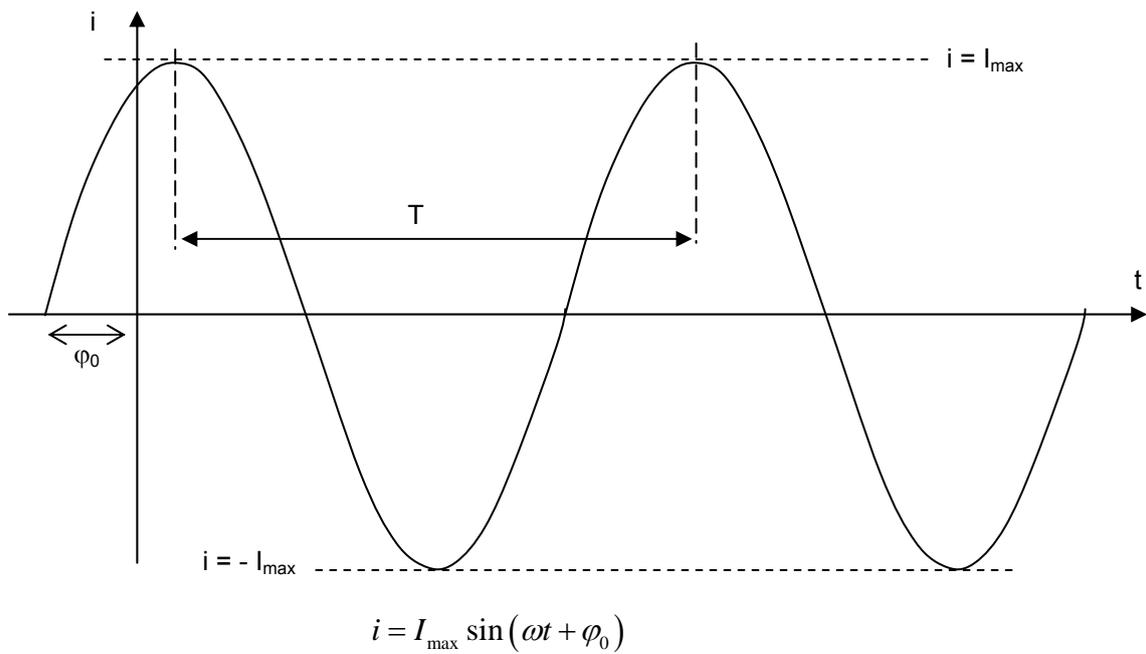


Figure 24

Considérons alors le cercle trigonométrique (Figure 25) ; l'intensité i peut être représentée par le mouvement de la projection du point M sur l'axe des ordonnées situé sur le cercle et décrivant un mouvement de rotation uniforme (à la vitesse angulaire ω).

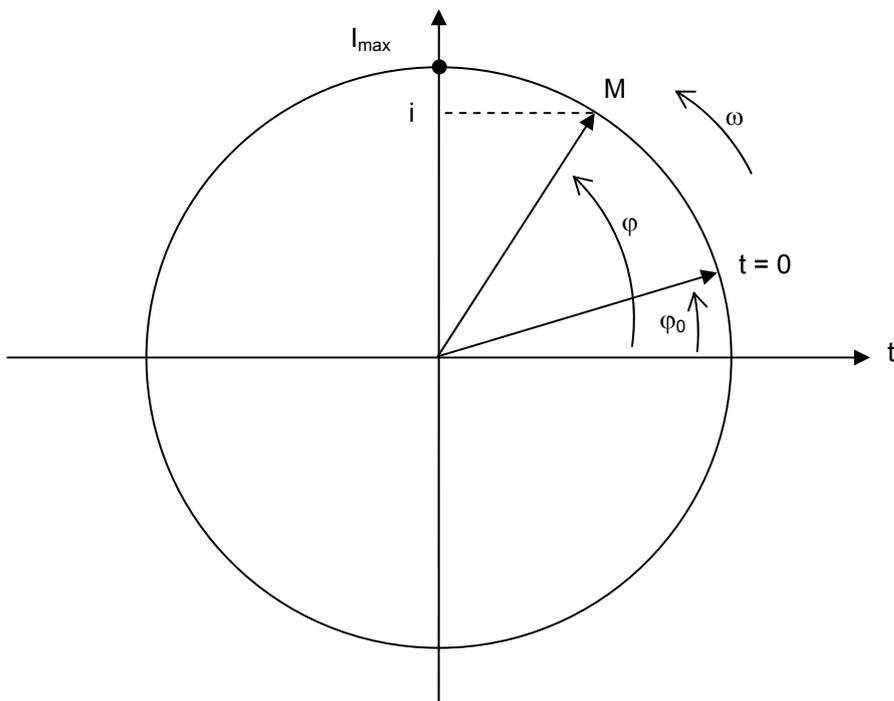


Figure 25

Ceci suggère de représenter la fonction intensité par un vecteur d'intensité constante égale à I_{max} , supposé tourner à la vitesse de rotation ω .

Un tel vecteur est appelé « vecteur de Fresnel »².

La Figure 26 montre trois représentations d'une même réalité mathématique : une fonction sinus. Il est beaucoup plus simple d'additionner, de dériver, d'intégrer des vecteurs représentant des sinus que de réaliser les mêmes opérations sur les représentations temporelles.

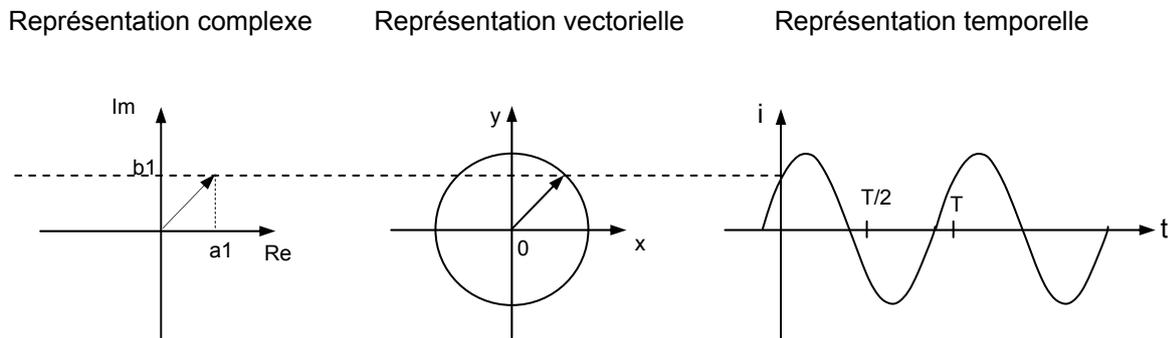


Figure 26

² Historiquement, il semble qu'Augustin Fresnel soit totalement étranger à la création du vecteur qui porte son nom.

La représentation par vecteur de Fresnel est très intéressante, car elle se prête facilement aux opérations d'addition. Ainsi, pour ajouter deux tensions instantanées u et v (de même fréquence), on pourra composer vectoriellement les deux vecteurs de Fresnel, comme le montre la Figure 27.

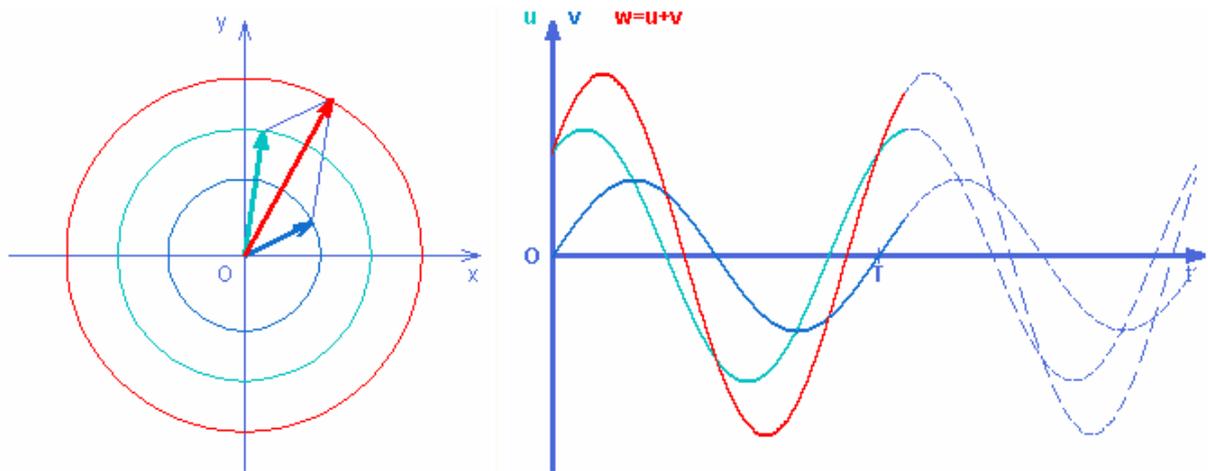


Figure 27

Notation imaginaire

On démontre mathématiquement que l'on peut associer un nombre complexe à un vecteur, c'est la transformation cissoïdale. L'intérêt de ce procédé est de faciliter grandement les calculs en remplaçant certaines opérations vectorielles par un simple calcul algébrique.

Nous utiliserons cette notation imaginaire chaque fois que nous aurons à calculer le produit, le quotient, la racine, la dérivée, l'intégrale, ... de fonctions sinusoïdales.

Dans le plan complexe, le vecteur \vec{V} peut être représenté par le point M d'affixe z .

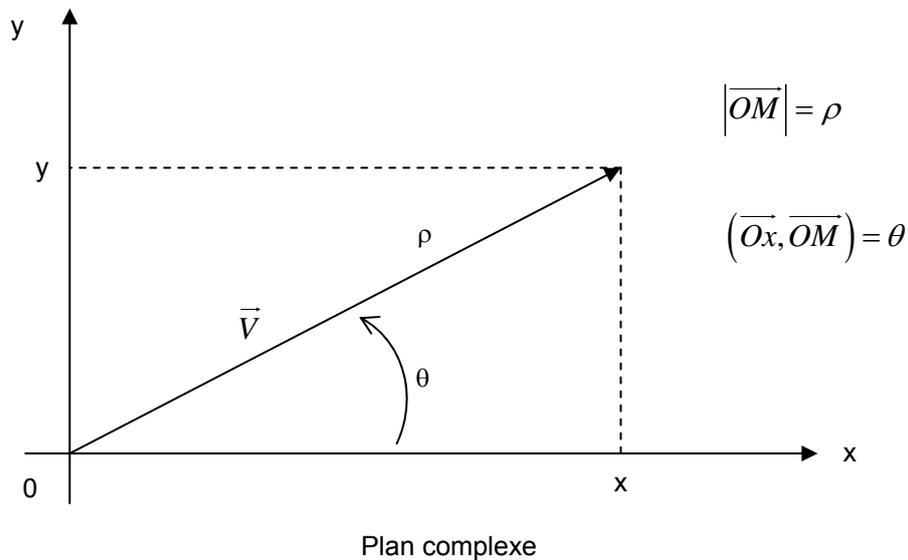


Figure 28

Le vecteur \vec{V} peut être représenté par le nombre complexe z .

Ce dernier peut s'exprimer de deux manières :

- en coordonnées cartésiennes, $z = x + jy$, avec $j^2 = -1$;
- en coordonnées polaires, $z = \rho \cdot (\cos \theta + j \sin \theta) = \rho \cdot e^{j\theta}$.

On a donc les relations :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{V}| \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

ρ est le module du vecteur \vec{V} et θ est l'argument du nombre complexe.

Exemple d'application :

Soient deux fonctions sinusoïdales :

$$u_1 = U_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = U_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Dont on désire connaître le produit $p = u_1 \cdot u_2$

On écrit les fonctions en écriture cissoïdale :

$$[p] = [u_1] \cdot [u_2] = U_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot U_2 \cdot e^{j\varphi_2} = U_1 U_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

D'où : $[p] = P \cdot e^{j\varphi}$ avec $\begin{cases} P = U_1 U_2 \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$

Soit : $p = U_1 U_2 \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$

Remarque : toutes les relations entre grandeurs instantanées demeurent valables en écriture complexe (fonctions cissoïdales).

Transformée cissoïdale

Définition : Soit $x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$ une fonction sinusoïdale du temps. On appelle transformée cissoïdale de $x(t)$ le nombre complexe \underline{X} tel que :

$$\underline{X} = C[x(t)] = X_M \cdot e^{j\varphi} \text{ avec } -\pi < \varphi < \pi$$

X_M , module du nombre complexe est bien sûr l'amplitude maximum de $x(t)$, alors que l'argument φ est la phase à l'origine de $x(t)$.

Exemples :

$$v(t) = 220\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \underline{V} = 220\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$i(t) = 20 \cos(\omega t) \rightarrow \underline{I} = 20 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Propriétés :

Linéarité : si $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, alors :

$$C\{a[x(t)]\} = aC[x(t)] \text{ avec } a = \text{constante}$$

$$C[ax(t) + by(t)] = aC[x(t)] + bC[y(t)] \text{ a et b = constantes}$$

Transformée cissoïdale de la dérivée :

Soit $x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$ une fonction sinusoïdale du temps. Alors :

$$\frac{dx}{dt} = X_M \omega \cos(\omega t + \varphi) = X_M \omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dont la transformée est $\underline{X} = X_M \cdot \omega \cdot e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega X_M e^{j\varphi}$ donc :

$$\boxed{C\left[\frac{dx}{dt}\right] = j \cdot \omega \cdot \underline{X}} \quad (1.9)$$

Transformée cissoïdale de l'intégrale :

De la même manière que ci-dessus :

$$\int x dt = -\frac{X_M}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{X_M}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{X} = -\frac{X_M}{\omega} e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = -j \frac{X_M}{\omega} e^{j\varphi} = \frac{X_M}{j\omega} e^{j\varphi} \text{ D'où :}$$

$$\boxed{C\left[\int x dt\right] = \frac{\underline{X}}{j\omega}} \quad (1.10)$$

La transformée cissoïdale permet d'entrer dans un monde où les opérations de dérivation et d'intégration deviennent des opérations purement algébriques, c'est à dire respectivement multiplication par $j\omega$ et division par $j\omega$. Mais ceci ne vaut que pour des fonctions sinusoïdales, la transformation de Laplace permet d'étendre un tel mécanisme à n'importe quelle fonction.

La loi d'Ohm en courant sinusoïdal, notion d'impédance

Les circuits classiques (circuits à constantes localisées) comportent trois sortes d'éléments :

- les résistances,
- les inductances,
- les condensateurs.

Premier cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur une résistance pure

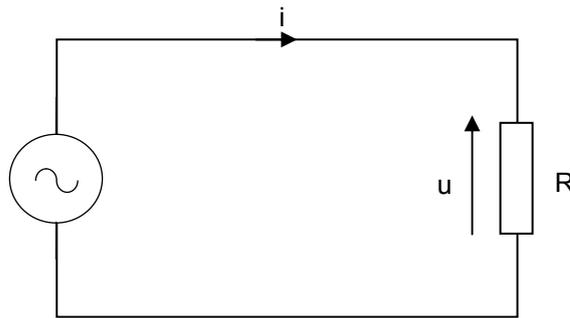


Figure 29

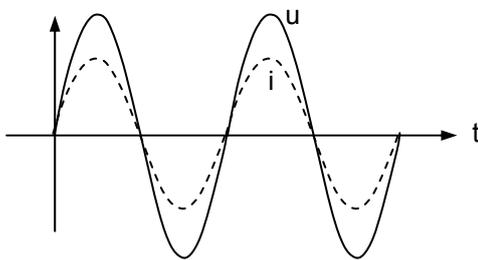
$$u = U_{\max} \sin(\omega t)$$

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_{\max}}{R} \sin(\omega t) = I_{\max} \sin(\omega t) \quad (1.11) \quad \text{avec} \quad I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R}$$

On voit que :

- Tension et intensité sont en phase ;

- $U_{\max} = R \cdot I_{\max}$ d'où $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R}$ (1.12)



Représentation temporelle



Représentation vectorielle, $\varphi_0 = 0$

Figure 30

Deuxième cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur une inductance pure

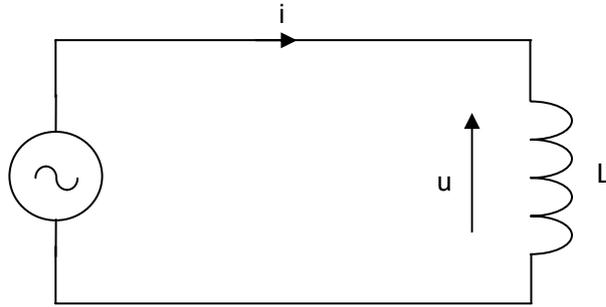


Figure 31

$$u = U_{\max} \sin(\omega t)$$

La force électromotrice induite dans l'inductance est : $e = -L \frac{di}{dt}$

Si la résistance du circuit est nulle, la loi d'Ohm relative aux valeurs instantanées s'écrit :

$$u + e = 0 \Rightarrow U_{\max} \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (1.13)$$

$$\text{Soit : } di = \frac{U_{\max}}{L} \sin(\omega t) \cdot dt \quad (1.14)$$

$$\text{En intégrant, il vient : } i = -\frac{U_{\max}}{L\omega} \cos(\omega t) + cte \quad (1.15)$$

$$\text{Soit : } i = \frac{U_{\max}}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + cte \quad (1.16)$$

Si l'on suppose le régime permanent établi, la constante d'intégration peut être négligée (la valeur moyenne de i étant nulle), donc :

$$\boxed{i = \frac{U_{\max}}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = I_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.17)$$

On constate que le courant est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ (déphasage retard) par rapport à la tension d'alimentation.

$$\text{On a : } I_{\max} = \frac{U_{\max}}{L\omega}, \text{ soit : } \boxed{U_{\text{eff}} = L\omega \cdot I_{\text{eff}}} \quad (1.18)$$

$L\omega$ est homogène à une résistance, c'est la **réactance** du circuit.

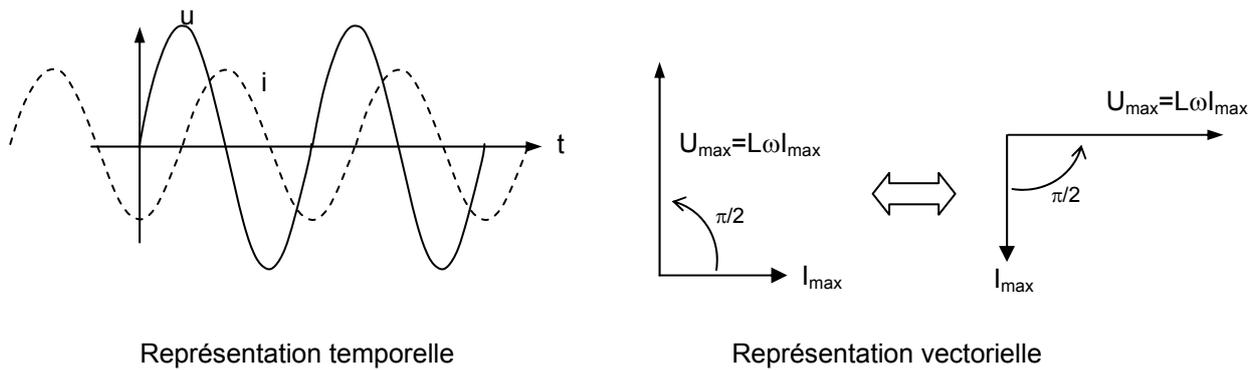


Figure 32

Troisième cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur un condensateur pur

Le condensateur C se charge et se décharge au cours d'un cycle puis l'opération se répète au cours du cycle suivant.

Si q est la charge instantanée du condensateur, on a :

$$q = C \cdot u = C \cdot U_{\max} \sin(\omega t)$$

On en déduit la valeur de l'intensité $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot \omega \cdot U_{\max} \cos(\omega t) = C \cdot \omega \cdot U_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.19)$$

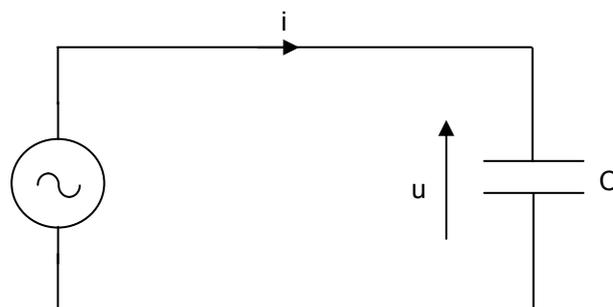


Figure 33

On constate expérimentalement que le courant i est sinusoïdal. Tout se passe, en définitive, comme si le condensateur était traversé par le courant alternatif.

En fait, il n'en est rien : l'apparition des charges sur les armatures du condensateur est due au phénomène d'influence et il n'y a pas circulation des charges à l'intérieur du condensateur.

L'intensité maximale est proportionnelle à la tension maximale appliquée :

$$I_{\max} = C \cdot \omega \cdot U_{\max}$$

On en déduit : $I_{eff} = C \cdot \omega \cdot U_{eff}$ (1.20)

L'intensité est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ (en avance) sur la tension appliquée.

$\frac{1}{C\omega}$ est homogène à une résistance. Cette quantité est appelée la **capacitance**.

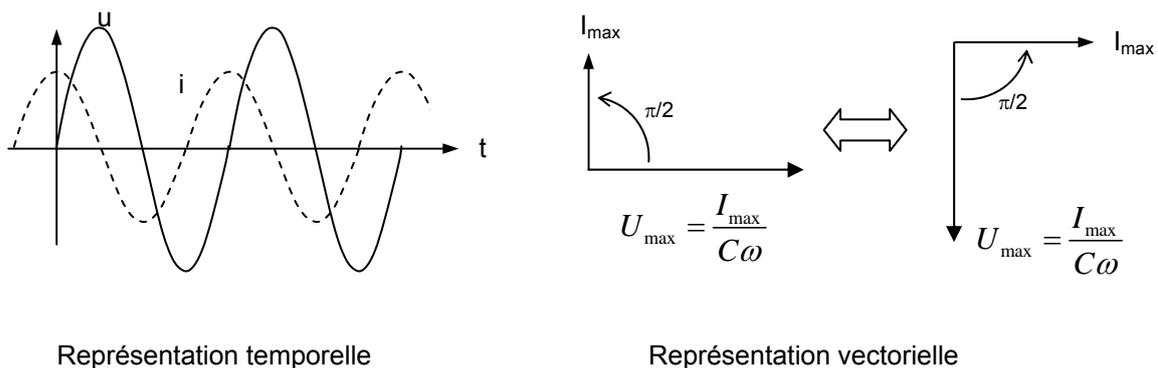


Figure 34

Quatrième cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur un circuit RLC série

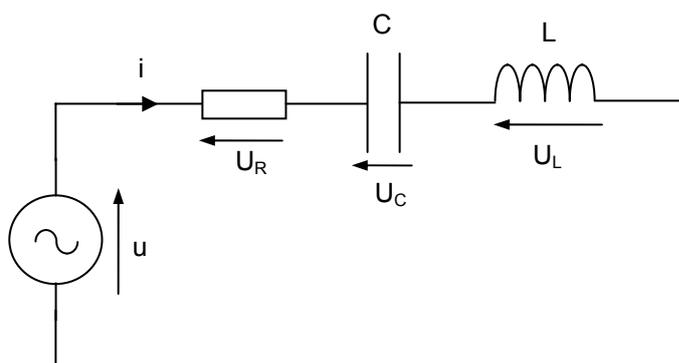


Figure 35

$$u = U_{max} \sin(\omega t)$$

$$\text{On a : } u = u_R + u_C + u_L \Rightarrow u = Ri + \frac{1}{C} \int i \cdot dt + L \frac{di}{dt} \quad (1.21)$$

Soit encore : $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt} = U_{\max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ (1.22)

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

On sait que la solution de cette équation est égale à la solution générale de l'équation sans second membre, à laquelle on ajoute une solution particulière de l'équation complète.

- Le régime permanent est donné par la solution particulière de l'équation complète (régime forcé) après disparition des termes transitoires. On sait que ce régime permanent est sinusoïdal et imposé par la source (second membre de l'équation).
- La solution générale de l'équation sans second membre ne dépend pas du générateur. Elle ne dépend que du circuit lui-même, c'est-à-dire des éléments RLC.

Par conséquent, cette solution générale définit le régime propre du circuit.

Résolution du problème :

- 1^{re} méthode : Calcul mathématique à partir de la résolution de l'équation caractéristique relative à l'équation. Détermination des constantes d'intégration à partir des conditions initiales. Cette méthode possède l'inconvénient d'être longue et laborieuse. En effet, elle permet d'obtenir le régime permanent et le régime transitoire (voir Figure 36). En fait, ici, seul le régime permanent nous intéresse.
- 2^e méthode : résolution vectorielle ou par les nombres complexes (permettant d'obtenir le seul régime permanent).

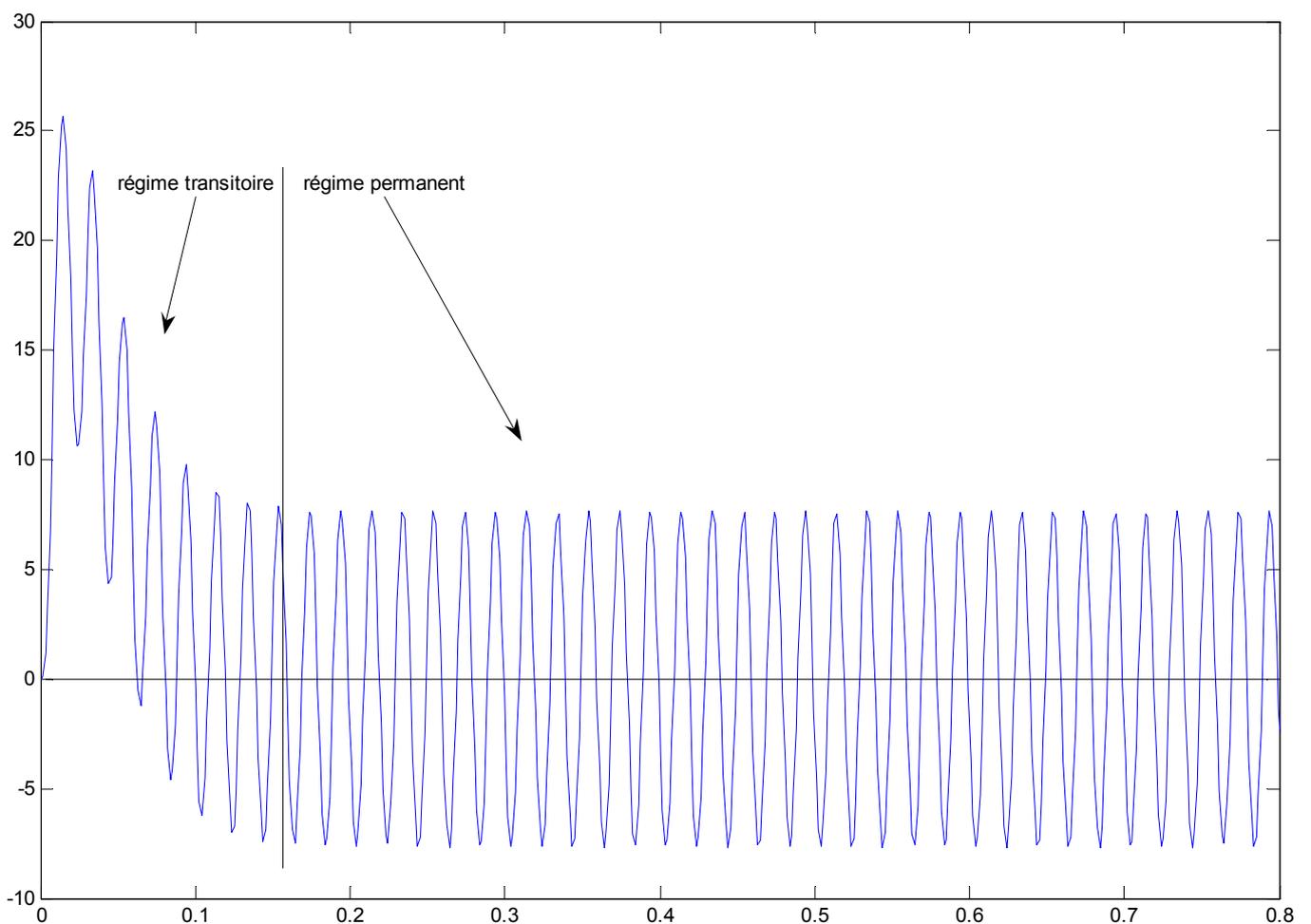


Figure 36

Le régime transitoire de la Figure 36 est obtenu en étudiant la tension qui apparaît aux bornes du condensateur d'un circuit RLC (avec par exemple $R = 1 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ et $C = 5 \text{ mF}$) lors de sa mise sous tension sur une source 220 V en considérant un déphasage initial nul. Le logiciel Matlab – Simulink est utilisé pour tracer la courbe.

En supposant le régime permanent établi, l'intensité est alors sinusoïdale et de même pulsation que la tension appliquée. On peut donc poser :

$$i = I_{\max} \sin(\omega t)$$

L'équation (1.21) s'écrit :

$$U_{\max} \sin(\omega t + \varphi) = Ri + \frac{1}{C} \int i \cdot dt + L \frac{di}{dt} \quad (1.23)$$

$$\text{D'où : } U_{\max} \sin(\omega t + \varphi) = RI_{\max} \sin(\omega t) + L\omega I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_{\max}}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.24)$$

En prenant l'intensité I comme origine des phases, le diagramme des vecteurs (dit de Fresnel) relatif à cette somme de fonctions sinusoïdales est alors le suivant :

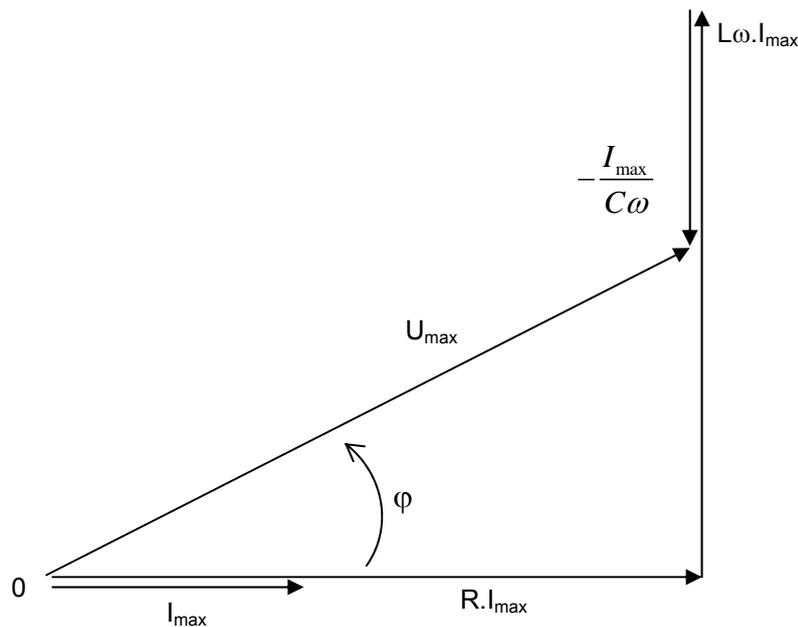


Figure 37

En appliquant le théorème de Pythagore, on en déduit :

$$U_{\max}^2 = (RI_{\max})^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \cdot I_{\max}^2$$

$$\text{D'où : } \boxed{\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (1.25)$$

La quantité Z, qui est homogène à une résistance, est appelée l'impédance du circuit. Elle s'exprime en Ohms (Ω).

Le déphasage φ de la tension par rapport au courant est donné par :

$$\boxed{\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}} \quad (1.26)$$

- 3^e méthode : résolution par la méthode des imaginaires.

On utilise les fonctions cissoïdales correspondantes aux fonctions sinusoïdales qui existent lorsque le régime permanent est établi :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt \quad (1.27)$$

Choisissons l'intensité i comme origine des phases. Dans ces conditions, les fonctions cissoïdales de l'intensité et de la tension sont représentées par les amplitudes complexes :

$$\begin{cases} [i] = I_{\max} \\ [u] = U_{\max} \cdot e^{j\varphi} \end{cases} \text{ avec } \varphi \text{ déphasage de la tension par rapport à l'intensité.}$$

L'équation (1.27) s'écrit alors :

$$U_{\max} \cdot e^{j\varphi} = RI_{\max} + L\omega I_{\max} e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{I_{\max}}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Soit encore : } U_{\max} \cdot e^{j\varphi} = RI_{\max} + jL\omega I_{\max} - j \frac{I_{\max}}{C\omega}$$

$$U_{\max} \cdot e^{j\varphi} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I_{\max}$$

$$\text{On pose } \boxed{[z] = Z \cdot e^{j\theta} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} \quad (1.28) \text{ impédance complexe du circuit.}$$

On constate que l'on a alors :

$$\boxed{[u] = [z] \cdot [i]} \quad (1.29) \text{ loi d'Ohm en écriture complexe.}$$

Identifions la partie réelle et la partie imaginaire dans l'expression (1.28), il vient :

$$\varphi = \theta \text{ et } U_{\max} = Z \cdot I_{\max} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \varphi = \text{arctg} \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right) \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Cas particulier de la résonance

Lorsque $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ soit : $LC\omega^2 = 1$, alors $\varphi = 0$ et $Z = R = Z_{\min}$

Dans ce cas, l'intensité efficace est maximum et vaut : $I = \frac{U_{\text{eff}}}{R}$

Groupements d'impédances

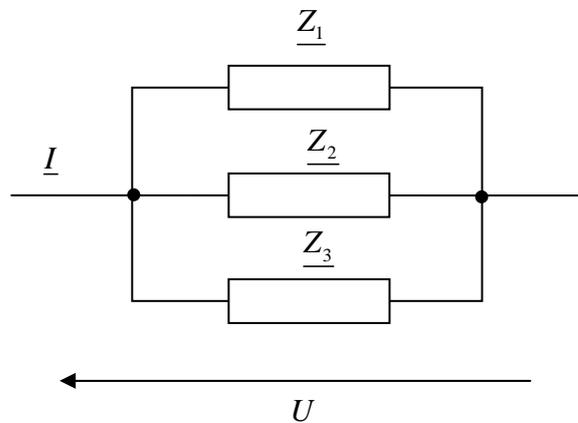
Il faut toujours prendre en compte les impédances complexes et ne jamais considérer les impédances comme égales à leurs modules.

Groupement d'impédances en série :

On a alors $[z] = \sum [z_i]$ soit $\underline{Z} = \sum \underline{Z}_i$ (1.31)

Par contre : $Z \neq \sum Z_i$

Groupement en parallèle :



On a : $\underline{U} = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_3$

La loi des nœuds donne : $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

On en déduit que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

D'une manière générale, un raisonnement par récurrence permet d'établir que l'impédance équivalente complexe de n impédances complexes placées en parallèle est donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_0^n \frac{1}{\underline{Z}_i} \quad (1.32)$$

Ou, en posant $\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$: $\underline{Y}_{eq} = \sum_0^n \underline{Y}_i$ (1.33)

Notion de puissance en alternatif

Puissance instantanée

L'énergie reçue par une portion de circuit (d'impédance Z) pendant le temps dt est :

$$dw = u \cdot i \cdot dt \quad \text{u et i étant la tension et le courant instantané.}$$

La puissance instantanée est alors : $p = \frac{dw}{dt} = u \cdot i$

Puissance moyenne

La puissance moyenne, calculée sur une période, est donnée par :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt$$

En régime permanent, on a : $\begin{cases} u = U_{\max} \sin(\omega t) \\ i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$

d'où $P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T U_{\max} \sin(\omega t) \cdot I_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \cdot dt$

Nous emploierons la formule : $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ afin de transformer le produit de sinus. Il vient :

$$P_{moy} = \frac{U_{max} \cdot I_{max}}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot dt = -\frac{U_{max} \cdot I_{max}}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \varphi) - \cos(-\varphi)] \cdot dt$$

$$\text{Or : } \cos(p) = \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) \cdot dt = \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)] = 0$$

$$\text{Et } \cos(q) = \int_0^T -\cos(-\varphi) \cdot dt = -\int_0^T \cos(\varphi) \cdot dt = -\cos(\varphi) \int_0^T dt = -\cos(\varphi) \cdot T$$

Il vient donc :

$$P_{moy} = \frac{U_{max} \cdot I_{max} \cdot \cos(\varphi)}{2} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)$$

$$\boxed{P_{moy} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)} \quad (1.34)$$

Le terme (facteur) $\cos(\varphi)$ est appelé « facteur de puissance » de la portion de circuit considérée. Sa valeur ne dépend que des éléments du circuit et de la fréquence de la source.

Puissance moyenne et puissance fluctuante

Exprimons la puissance instantanée $p = u \cdot i$

$$\begin{cases} u = U_{max} \sin(\omega t) \\ i = I_{max} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \text{ et } U_{max} = Z \cdot I_{max}, \text{ avec } Z : \text{impédance de la portion de circuit considérée.}$$

On peut poser : $[z] = Z \cdot e^{j\varphi} = R + jX$

X est la réactance de la portion de circuit considérée $= L\omega - \frac{1}{C\omega}$

On a alors : $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{R}{Z}$; $\cos(\varphi) = \frac{X}{Z}$

D'où : $p = u \cdot i = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Nous emploierons la formule : $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ pour réécrire p ainsi :

$$p = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin(\omega t) \cdot [\sin(\omega t) \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos(\omega t)]$$

$$p = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \frac{R}{Z} \cdot \sin^2(\omega t) + U_{max} \cdot I_{max} \cdot \frac{X}{Z} \cdot \frac{\sin(2\omega t)}{2} \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$p = R \cdot I_{\max}^2 \cdot \sin^2(\omega t) + I_{\max}^2 \cdot \frac{X}{2} \cdot \sin(2\omega t) = R \cdot I_{\max}^2 \cdot \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) + I_{\max}^2 \cdot \frac{X}{2} \cdot \sin(2\omega t)$$

$$p = \frac{R \cdot I_{\max}^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot I_{\max}^2 \cdot Z \cdot \cos \varphi \cdot \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} \cdot I_{\max}^2 \cdot Z \cdot \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t)$$

La formule : $\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b)$ permet d'écrire :

$$p = \frac{R \cdot I_{\max}^2}{2} + \frac{Z I_{\max}^2}{2} \cdot \cos(2\omega t + \varphi + \pi)$$

Le premier terme correspond à la puissance moyenne P_{moy} . En effet :

$$\frac{R \cdot I_{\max}^2}{2} = \frac{Z \cdot \cos \varphi}{2} \times I_{\max}^2 = \frac{U_{\max} \cdot I_{\max} \cdot \cos \varphi}{2} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi$$

Le deuxième terme est appelé « puissance fluctuante » p_{fluc} . Sa valeur moyenne est nulle et elle varie à la fréquence double de la fréquence du courant.

Finalement la puissance instantanée s'écrit :

$$p = P_{moy} + p_{fluc}$$

Puissance active et puissance réactive

Considérons le diagramme de Fresnel de la Figure 38 relatif à une portion de circuit d'impédance Z :

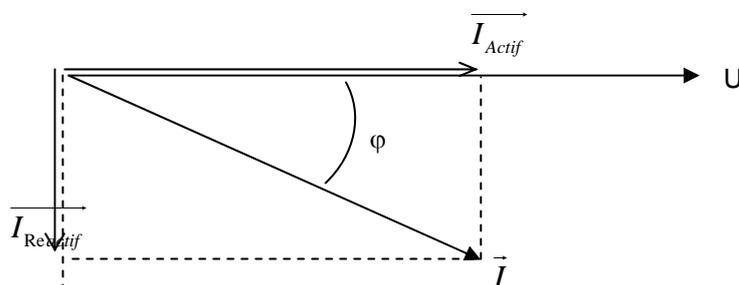


Figure 38

L'intensité totale \vec{I} traversant le circuit peut être décomposée en : $\vec{I} = \vec{I}_{Actif} + \vec{I}_{Reactif}$

Le courant \vec{I}_{Actif} est en phase avec la tension \vec{U} , il est appelé « courant actif » ou « courant watté ».

Le courant $\overrightarrow{I_{Réactif}}$ est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension \overrightarrow{U} , il est appelé « courant réactif » ou « courant déwatté ».

Par définition, la puissance active est la puissance dissipée dans les éléments récepteurs du circuit (résistance en particulier).

Par définition, la puissance réactive est la puissance échangée entre les éléments réactifs (inductances et capacités) du circuit considéré et le/les générateurs qui alimentent le circuit considéré.

La puissance instantanée est la somme des puissances active et réactive à un instant donné.

$$p = \underbrace{R \cdot I_{\max}^2 \cdot \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right)}_{\text{puissance active}} + \underbrace{\frac{X \cdot I_{\max}^2}{2} \cdot \sin(2\omega t)}_{\text{puissance réactive}}$$

En appelant P l'amplitude de la puissance active et Q l'amplitude de la puissance réactive, il vient :

$$p = P(1 - \cos(2\omega t)) + Q \sin(2\omega t)$$

On constate que la valeur moyenne P de la puissance active est égale à la puissance moyenne :

$$P_{\text{moy}} = P = \frac{R \cdot I_{\max}^2}{2} = R \cdot I_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi$$

Cette puissance s'exprime en watts (W). Elle est fournie par le courant actif $\overrightarrow{I_{Actif}}$ et $P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{actif}}$

On constate également que la valeur moyenne de la puissance réactive est nulle. Son amplitude est donnée par :

$$Q = \frac{X \cdot I_{\max}^2}{2} = X \cdot I_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin \varphi$$

Cette amplitude s'exprime en « voltampères réactifs » (var, prend un s au pluriel, 1 var, 20 vars).

$$Q = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{Réactif}}$$

Puissance apparente

Par analogie avec le courant continu pour lequel le produit U.I représente la puissance, on appelle « puissance apparente » le produit :

$$S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = \frac{U_{\max} \cdot I_{\max}}{2} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

La puissance apparente s'exprime en voltampère (V.A).

Puissance complexe

Soit une impédance $\underline{Z} = R + jX$ (X est la réactance de l'impédance, positive pour une inductance, négative pour une capacitance), aux bornes de laquelle on impose la tension \underline{V} et qui est traversée par un courant \underline{I} tel que :

$$\underline{V} = Ve^{j\omega t} \text{ et } \underline{I} = Ie^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \underline{I}^* = Ie^{-j(\omega t + \varphi)}, \underline{I}^* \text{ est le conjugué de } \underline{I}.$$

On définit la puissance complexe par : $\underline{S} = \underline{V}\underline{I}^* = P - jQ$

$$\underline{S} = \underline{V}\underline{I}^* = Ve^{j\omega t} Ie^{-j(\omega t + \varphi)} = VIe^{-j\varphi} = VI \cos \varphi - jVI \sin \varphi = P - jQ$$

On définit les puissances vues précédemment en fonction de la puissance complexe par les formules suivantes :

- Puissance active : $P = VI \cos \varphi = RI^2 = \frac{V_R^2}{R} = \text{Re}(\underline{V}\underline{I}^*)$, en Watt W,
- Puissance réactive : $Q = VI \sin \varphi = XI^2 = \frac{V_X^2}{X} = \text{Im}(\underline{V}\underline{I}^*)$, en var,
- Puissance apparente : $S = VI = ZI^2 = V^2/Z = \text{module}(\underline{V}\underline{I}^*)$, en VA,
- Facteur de puissance : $\cos \varphi = R/Z = P/S$

On a également les relations suivantes qui présentent un moindre degré d'utilité :

$$P = \frac{1}{2}(\underline{S} + \underline{S}^*)$$

$$Q = \frac{1}{2j}(\underline{S} - \underline{S}^*)$$

Exemple :

Déterminons la puissance active, la puissance réactive et la puissance apparente dissipée dans un circuit d'impédance $\underline{Z} = 3 + j4 \Omega$, alimenté par une tension $V = 100 \angle 30^\circ \text{ V}$.

Déterminons tout d'abord l'intensité qui circule dans le circuit : $\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{100 \angle 30^\circ}{5 \angle 53,1^\circ} = 20 \angle -23,1^\circ \text{ A}$

Premier groupe de formules :

$$P = VI \cos \varphi = 100 \times 20 \times \cos(30 + 23,1) = 1200 \text{ W}$$

$$Q = VI \sin \varphi = 100 \times 20 \times \sin(30 + 23,1) = 1600 \text{ vars}$$

$$S = VI = 100 \times 20 = 2000 \text{ VA}$$

Deuxième groupe de formule :

$$P = RI^2 = 3 \times 20^2 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = XI^2 = 4 \times 20^2 = 1600 \text{ vars}$$

$$S = ZI^2 = \sqrt{(3^2 + 4^2)} \times 20^2 = 2000 \text{ VA}$$

Troisième groupe de formule :

Attention : il faut prendre garde à considérer la d.d.p. aux bornes de la résistance ou de la réactance et non la tension totale aux bornes de l'impédance Z.

$$\text{Ici, } V_R = R \times I = 3 \times (20 \angle -23,1^\circ) = 60 \angle -23,1^\circ \text{ V}$$

$$V_X = (4 \angle 90^\circ) \times (20 \angle -23,1^\circ) = 80 \angle 66,9^\circ \text{ V}$$

$$\text{D'où : } P = \frac{V_R^2}{R} = \frac{60^2}{3} = 1200 \text{ W}$$

$$Q = \frac{V_X^2}{X} = \frac{80^2}{4} = 1600 \text{ vars}$$

$$S = \frac{V^2}{Z} = \frac{100^2}{5} = 2000 \text{ VA}$$

Quatrième groupe de formules :

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = (100 \angle 30^\circ) \times (20 \angle 23,1^\circ) = 2000 \angle 53,1^\circ = 1200 + j1600 \text{ VA}$$

S'où l'on tire $P = 1200 \text{ W}$, $Q = 1600 \text{ vars}$ et $S = 2000 \text{ VA}$

Le facteur de puissance est $\cos 53,1^\circ = 0,6$ inductif. Inductif car la puissance réactive Q que nous avons calculé est positive, c'est donc l'indication d'une consommation de puissance réactive par l'impédance et cela implique que cette impédance soit de nature inductive. Ou encore, en examinant l'impédance, l'argument positif implique que la d.d.p. aux bornes de l'impédance est déphasée en avance par rapport au courant qui la traverse ($\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$) ce qui implique également une impédance de nature inductive.

L'énergie électrique est essentiellement distribuée aux utilisateurs sous forme de courant alternatif par des réseaux en haute, moyenne et basse tension. L'énergie consommée est composée d'une partie "active", transformée en chaleur ou mouvement, et d'une partie "réactive" transformée par les actionneurs électriques pour créer leurs propres champs électromagnétiques.

L'utilisateur ne bénéficie que de l'apport énergétique de la partie "active" ; la partie "réactive" ne peut pas être éliminée, mais doit être compensée par des dispositifs appropriés. L'énergie totale soutirée au réseau de distribution sera ainsi globalement réduite. Les économies d'énergie réalisées se chiffrent par dizaines de pour cent de la consommation globale.

L'énergie réactive : définitions et rappels essentiels

Energies active, réactive, apparente

Toute machine électrique utilisant le courant alternatif (moteur, transformateur) met en jeu deux formes d'énergie : l'énergie active et l'énergie réactive.

L'énergie active consommée (kWh) résulte de la puissance active P(kW) des récepteurs. Elle se transforme intégralement en puissance mécanique (travail) et en chaleur (pertes).

L'énergie réactive consommée (kvarh) sert essentiellement à l'alimentation des circuits magnétiques des machines électriques. Elle correspond à la puissance réactive Q(kvar) des récepteurs.

L'énergie apparente (kVAh) est la somme vectorielle des deux énergies précédentes. Elle correspond à la puissance apparente S(kVA) des récepteurs, somme vectorielle de P(kW) et Q(kvar).

Composantes active et réactive du courant

A chacune des énergies active et réactive, correspond un courant. Le courant actif (I_a) est en phase avec la tension du réseau. Le courant réactif (I_r) est déphasé de 90° par rapport au courant actif, soit en retard (récepteur inductif), soit en avance (récepteur capacitif).

Le courant apparent (I_t) est le courant résultant qui parcourt la ligne depuis la source jusqu'au récepteur.

Si les courants sont parfaitement sinusoïdaux, on peut utiliser la représentation de Fresnel.

Ces courants se composent alors vectoriellement comme représenté à la Figure 39 :

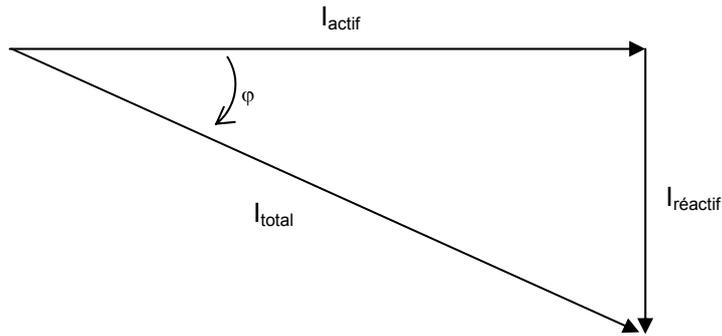


Figure 39

Composition vectorielle des courants

$$\begin{cases} I_{\text{actif}} = I_{\text{total}} \times \cos \varphi \\ I_{\text{réactif}} = I_{\text{total}} \times \sin \varphi \\ I_{\text{total}} = \sqrt{I_{\text{actif}}^2 + I_{\text{réactif}}^2} \end{cases}$$

Composantes active et réactive de la puissance : triangle des puissances

Le diagramme précédent (Figure 39) établi pour les courants est aussi valable pour les puissances, en multipliant chacun des courants par la tension commune U .

On définit ainsi (Figure 40) :

- la puissance apparente : $S = UI$ (kVA),
- la puissance active : $P = UI \cdot \cos\varphi$ (kW),
- la puissance réactive : $Q = UI \cdot \sin\varphi$ (kvar).

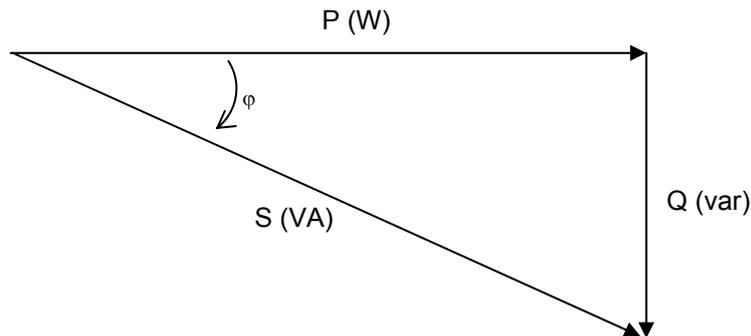
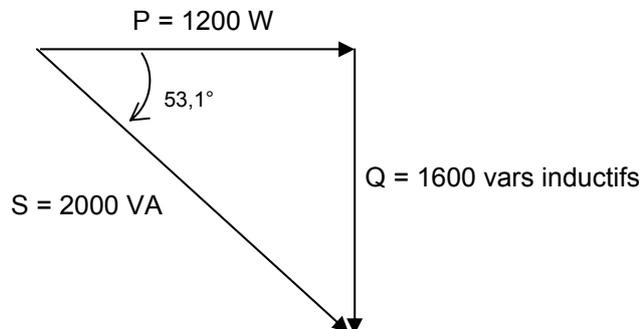


Figure 40

Composition vectorielle des puissances

Pour l'exemple précédent, page 70, le triangle des puissances est le suivant :



Citons les valeurs approximatives de $\cos\varphi$ des principaux actionneurs consommateurs d'énergie réactive :

- moteur asynchrone à 100 % de charge : $\cos\varphi = 0,85$
- moteur asynchrone à 50 % de charge : $\cos\varphi = 0,73$
- lampes à fluorescence : $\cos\varphi = 0,5$
- chauffage par induction : $\cos\varphi = 0,5$

Ces quelques exemples montrent l'impact très important de la partie réactive de la consommation énergétique des actionneurs qui comportent des circuits magnétiques : y remédier est une des problématiques de base de tout concepteur et installateur de produits et équipements électriques.

Facteur de puissance

Le facteur de puissance est égal par définition à :

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{\text{puissance active (W)}}{\text{puissance apparente (VA)}}$$

Si les courants et tensions sont des signaux parfaitement sinusoïdaux, le facteur de puissance est égal à $\cos\varphi$. On utilise également la variable $\text{tg}\varphi$. Dans les mêmes conditions, nous avons la relation :

$$\text{tg}\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\text{puissance réactive (var)}}{\text{puissance active (W)}}$$

L'objectif de la compensation d'énergie réactive est de réduire le courant appelé sur le réseau. L'énergie réactive est fournie par des condensateurs, au plus près des charges inductives. Sur une période de temps donnée, nous avons également :

$$\text{tg}\varphi = \frac{E_r}{E_a} = \frac{\text{énergie active consommée (kvarh)}}{\text{énergie active consommée (kWh)}}$$

La circulation de l'énergie réactive a des incidences techniques et économiques importantes. En effet, pour une même puissance active P , la Figure 41 montre qu'il faut fournir d'autant plus de puissance apparente, et donc de courant, que la puissance réactive est importante.

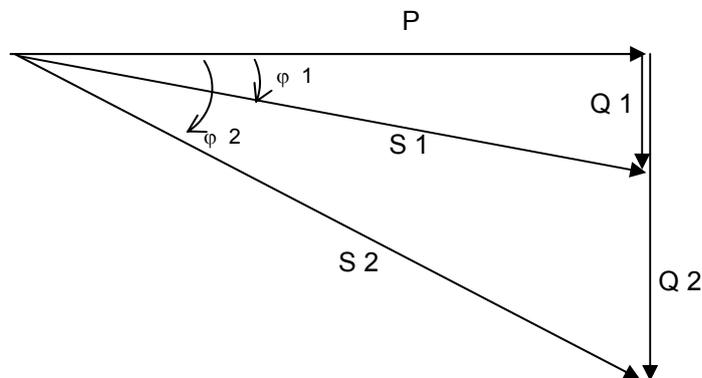


Figure 41

Composition vectorielle des puissances

Ainsi, du fait d'un courant appelé plus important, la circulation de l'énergie réactive sur les réseaux de distribution entraîne :

- des surcharges au niveau des transformateurs,
- l'échauffement des câbles d'alimentation,
- des pertes supplémentaires,
- des chutes de tension importantes.

Les tarifs sont répartis par niveau de puissance, en trois grandes familles :

- Tarif Bleu (de 3 à 36 kVA)
- Tarif Jaune (de 36 à 250 kVA)
- Tarif Vert (au-delà de 250 kVA).

Certaines options tarifaires proposent un découpage de l'année en périodes tarifaires, selon les heures et même les saisons. La facture comporte deux éléments principaux : le montant de l'abonnement (lié au niveau de puissance souscrit) et le prix de l'énergie consommée. (<http://www.edf.fr>).

Le Tarif Vert est le seul qui facture directement l'énergie réactive. Le tableau de comptage est équipé d'un compteur spécifique d'énergie réactive. Celle-ci peut donc être facilement identifiée sur la facture d'électricité.

Pour les autres tarifs, Bleu et Jaune, le système de comptage ne permet pas de mesurer directement l'énergie réactive. La puissance (souscrite en kVA) est déterminée par un disjoncteur en Tarif Bleu ou un contrôleur en Tarif Jaune. Ces dispositifs limitent l'intensité du courant et donc la puissance apparente. Pour disposer d'une puissance utile (active) la plus proche possible de celle qu'il a souscrite, le client doit minimiser la puissance réactive de son installation.

Lorsque les besoins de puissance d'un client s'accroissent, il peut aussi être confronté aux limites des tarifs (36 kVA en Tarif Bleu et 250 kVA en Tarif Jaune) comme à celles de son installation. Ce qui entraîne généralement des investissements importants (renforcement des câbles, changement de disjoncteur, remplacement du TGBT, etc).

Une bonne maîtrise de la composition de la puissance appelée permet alors de limiter les impacts économiques et passe, entre autres, par la compensation de l'énergie réactive.

Une forte consommation d'énergie réactive chez l'utilisateur nécessite de la part d'EDF des installations dimensionnées plus largement, dont le coût grève celui de la fourniture d'électricité.

Les batteries de condensateurs compensent l'énergie réactive consommée par les équipements électriques, ce qui permet de réduire une partie de la facture d'énergie.

Les bénéfices de la compensation sont doubles :

- d'une part diminuer la facture énergétique,
- d'autre part optimiser les installations.

Du 1er novembre et jusqu'au 31 mars, les abonnés au Tarif Vert se voient facturer l'énergie réactive consommée par leurs installations.

Pour les abonnés au Tarif Jaune, l'installation d'une batterie de condensateurs s'avère bénéfique dans certains cas selon deux schémas :

- soit diminuer le niveau de puissance souscrite,
- soit pour accroître la puissance utile disponible en conservant le même niveau de puissance.

Finalement, quel que soit le contrat souscrit, pour des problèmes de facturation, de disponibilité de puissance ou de surcoût d'installation, il est important de minimiser la puissance réactive consommée.

Ces problèmes de compensation de l'énergie réactive apparaissent sur certains navires (paquebots entre autre).

Pour une installation, les conséquences d'une trop grande consommation d'énergie réactive sont nombreuses :

- pénalités (en tarif vert) par le fournisseur d'électricité,
- augmentation de la puissance souscrite au fournisseur d'énergie, des pertes Joules et des chutes de tension dans les circuits,
- surcharge au niveau du transformateur et des câbles d'alimentation,
- surdimensionnement et précaution au niveau des protections,
- dégradation de la qualité de l'installation électrique.

La compensation de l'énergie réactive

Pour les raisons évoquées ci-dessus, il est nécessaire de produire l'énergie réactive au plus près possible des charges, pour éviter qu'elle ne soit appelée sur le réseau. C'est ce qu'on appelle "compensation de l'énergie réactive". Pour inciter à cela et éviter de sur-calibrer son réseau, le distributeur d'énergie pénalise financièrement les consommateurs d'énergie réactive au-delà d'un certain seuil.

Pour fournir l'énergie réactive aux récepteurs inductifs, on utilise :

- des condensateurs lorsque la demande d'énergie réactive est relativement constante ;
- un compensateur synchrone (machine synchrone à vide) lorsque la demande d'énergie varie dans de très larges proportions.

Pour réduire la puissance apparente absorbée au réseau de la valeur S_2 à la valeur S_1 , on doit connecter une batterie de condensateurs fournissant l'énergie réactive Q_c (Figure 42), telle que $Q_c = P \cdot (tg \varphi_2 - tg \varphi_1)$

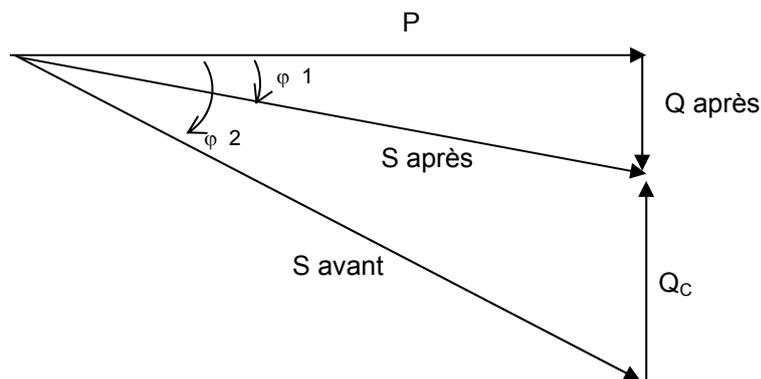


Figure 42

Principe de la compensation d'énergie réactive

L'intérêt économique de la compensation est mesuré en comparant le coût d'installation des batteries de condensateurs aux économies qu'elle procure.

Le coût des batteries de condensateurs dépend de plusieurs paramètres dont :

- la puissance installée,
- le niveau de tension,
- le fractionnement en gradins,
- le mode de commande,
- le niveau de qualité de la protection.

Le retour d'investissement est en général rapide dans une installation électrique, de l'ordre de 1 à 3 ans.

Choix de la localisation

- Compensation globale : la batterie est raccordée en tête d'installation et assure la compensation pour l'ensemble des charges. Elle convient lorsqu'on cherche essentiellement à supprimer les pénalités et soulager le poste de transformation.
- Compensation locale ou par secteurs : la batterie est installée en tête du secteur d'installation à compenser. Elle convient lorsque l'installation est étendue et comporte des ateliers dont les régimes de charge sont différents.
- Compensation individuelle : la batterie est raccordée directement aux bornes de chaque récepteur inductif (moteur en particulier). Elle est à envisager lorsque la puissance du moteur est importante par rapport à la puissance souscrite. Cette compensation est techniquement idéale puisqu'elle produit l'énergie réactive à l'endroit même où elle est consommée, et en quantité ajustée à la demande.

Choix du type de compensation

- Compensation fixe : on met en service l'ensemble de la batterie dans un fonctionnement "tout ou rien". La mise en service peut être manuelle (par disjoncteur ou interrupteur), semi-automatique (par contacteur), asservie aux bornes des moteurs. Ce type de compensation est utilisé lorsque la puissance réactive est faible (< 15 % de la puissance du transformateur) et la charge relativement stable.
- Compensation automatique ou en "gradins" : la batterie de condensateurs est fractionnée en gradins, avec possibilité de mettre en service plus ou moins de gradins, en général de façon automatique. Ce type de batterie est installé en tête de la distribution BT ou d'un secteur important. Cela permet une régulation pas à pas de l'énergie réactive. L'enclenchement et le déclenchement des gradins sont pilotés par un relais varométrique.

Compensation d'énergie réactive en présence d'harmoniques

Les équipements faisant appel à l'électronique de puissance (variateurs de vitesse, redresseurs, onduleurs, etc), de plus en plus utilisés, sont responsables de la circulation de courants harmoniques dans les réseaux. Ces harmoniques perturbent le fonctionnement de nombreux dispositifs. En particulier, les condensateurs y sont extrêmement sensibles du fait que leur impédance décroît proportionnellement au rang des harmoniques présents.

Dans certaines circonstances, des phénomènes de résonance peuvent se produire entraînant une forte distorsion de tension et la surcharge des condensateurs.

Selon la puissance des générateurs d'harmoniques présents, différents types de condensateurs doivent être choisis, associés éventuellement à des inductances.

Pour les valeurs élevées de puissance des générateurs d'harmoniques, le traitement des harmoniques est en général nécessaire.

Le dispositif approprié (filtre d'harmonique) remplit à la fois les fonctions de compensation d'énergie réactive et de filtrage des harmoniques.

Théorème de Boucherot : conservation des puissances active et réactive

Les réseaux électriques sont constitués par un ensemble de dipôles placés en parallèle ; certains sont producteurs (alternateurs, condensateurs) d'autres sont consommateurs. Le théorème de Paul Boucherot formulé en 1900 facilite l'analyse du fonctionnement de ces réseaux en considérant non les impédances, mais les puissances mises en jeu dans ces dipôles.

Théorème de Boucherot :

Dans un réseau électrique constitué de n dipôles ($k = 1, 2, \dots, n$), la puissance active P (respectivement la puissance réactive Q) est égale à la somme algébrique des puissances actives P_k (respectivement des puissances réactives Q_k) des dipôles. Ceci s'applique que les dipôles soient producteurs ou consommateurs, en actif comme en réactif, c'est-à-dire quel que soit le signe des termes P_k et Q_k .

$$P = \sum_{k=1}^n P_k \text{ et } Q = \sum_{k=1}^n Q_k$$

Ce théorème permet de résoudre les exercices et problèmes concernant les puissances par le calcul. Il est valable aussi bien en monophasé qu'en triphasé.

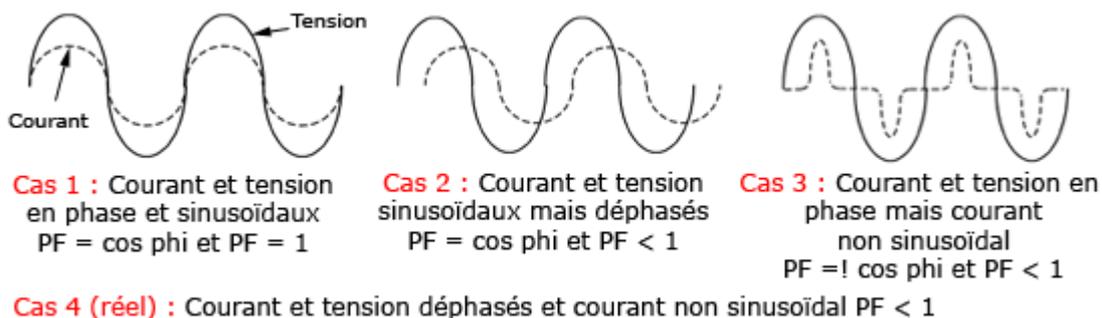
La puissance apparente ne peut s'obtenir que par les relations : $\vec{S} = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k$ (solution graphique) ou par le calcul

avec $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$

Facteur de puissance et $\cos \varphi$

Il faut faire attention car il y a souvent confusion entre ce que l'on appelle le $\cos \varphi$ et le facteur de puissance, cela n'est pas la même chose. Le seul cas très exceptionnel où $FP = \cos \varphi$ se produit quand la tension et le courant tiré du réseau sont purement sinusoïdaux, autrement dit quasiment jamais (il y a toujours déformation, même minime).

Voici les différences avec les 4 cas possibles :



- cas 1 : c'est celui vers lequel on veut tendre avec un dispositif correcteur de facteur de puissance. C'est celui qu'on obtient si l'on branche une résistance pure sur le réseau, elle n'engendre aucune déformation ni déphasage (avance ou retard du courant sur la tension).
- cas 2 : c'est celui obtenu quand la charge est purement inductive, elle ne déforme pas le courant, mais elle le retarde de 90° . Dans le cas d'une charge purement capacitive, le courant sera aussi non déformé, mais en avance sur la tension cette fois de 90° .
- cas 3 : c'est un cas rare où le courant est très déformé, mais il reste en phase avec la tension. On a donc $\cos \varphi = 1$ car les 2 fondamentaux sont en phase, mais FP est inférieur à 1 à cause de la déformation du courant.
- cas 4 : c'est le mélange des cas 2 et 3 (non représenté). Le courant est à la fois déformé et déphasé, dans un sens ou dans l'autre, par rapport à la tension.

Le $\cos \varphi$, aussi appelé facteur de déplacement ou plus exactement facteur de déplacement de la puissance, représente le décalage ($-90^\circ < \varphi < 90^\circ$) entre le courant et la tension lorsque les 2 sont purement sinusoïdaux.

Le cos phi ne se base que sur les fréquences fondamentales et ignore les harmoniques, il est donc peu intéressant vu que l'on ne travaille jamais avec des signaux parfaits. Pour être plus global, il faut alors parler de facteur de puissance. Ce FP englobe à la fois le déphasage et un facteur de distorsion supplémentaire créé par les harmoniques. Il est donc un peu plus rigoureux car il s'applique à tous les types de signaux. On peut le définir de la manière suivante : $FP = K_D \times K_\theta$

Kd est le facteur de distorsion, il varie entre 0 et 1. Il se calcule avec le taux de distorsion harmonique global (THD) qui définit globalement la déformation d'un signal sinusoïdal. K θ est le facteur de déphasage entre le fondamental du courant et la tension et il varie aussi entre 0 et 1. Le but est de maximiser les 2 à la fois pour tendre vers PF = 1. Comme les harmoniques sont directement rattachées au facteur de puissance, la norme a imposé des limites à respecter sur leurs niveaux.

Exercices : puissances en alternatif monophasé

1. Tracer le triangle des puissances pour un circuit alimenté par une tension $v = 150 \sin(\omega t + 10^\circ)$ où circule un courant $i = 5 \sin(\omega t - 50^\circ)$.
2. La puissance dissipée dans un circuit série à deux éléments est de 940 W ; le facteur de puissance pour ce circuit est de 0,707 capacitif. Sachant que la tension appliquée est donnée par $v = 99 \sin(6000t + 30^\circ)$, déterminer la nature et la valeur des éléments du circuit.
3. Tracer le triangle des puissances pour le circuit série de la Figure 43

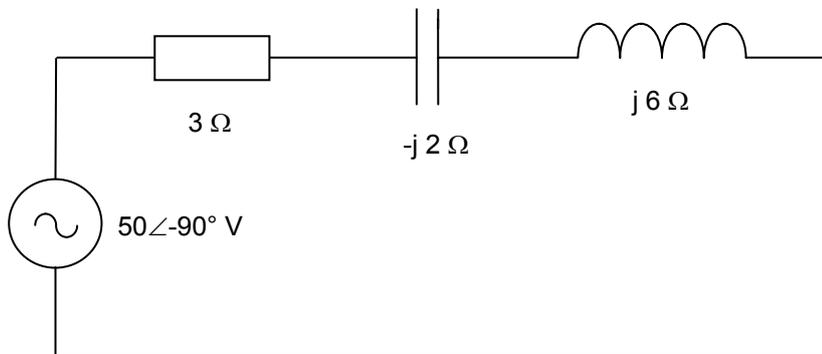


Figure 43

4. Dans le circuit de la Figure 44 circule un courant efficace total de 30 A. Déterminer les relations permettant de calculer P, Q et S pour ce circuit.

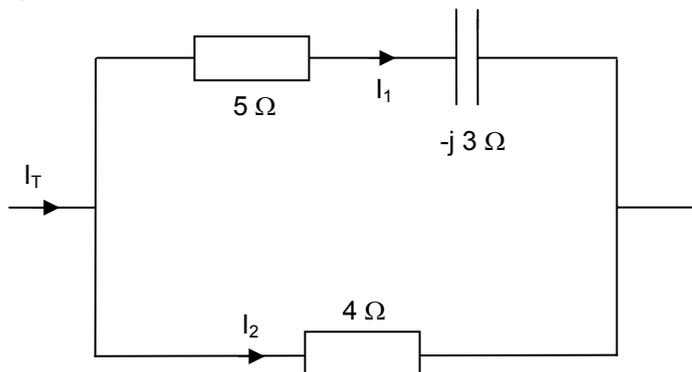


Figure 44

5. La puissance totale dissipée dans le circuit parallèle de la Figure 45 est de 1000 W. Calculer la puissance dissipée dans chacune des résistances et déterminer l'intensité totale I_T .

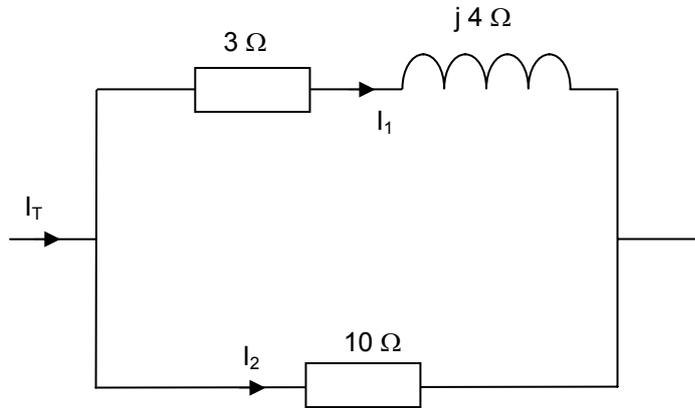


Figure 45

6. Déterminer le triangle des puissances pour chacune des branches du circuit parallèle de la Figure 46 En faire la somme vectorielle pour obtenir le triangle des puissances pour le circuit complet.

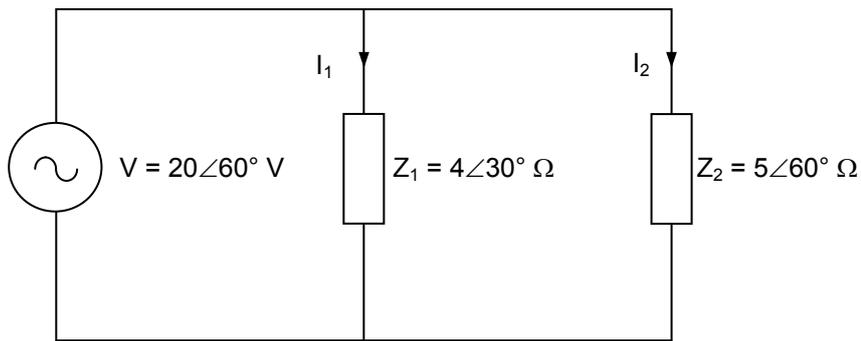


Figure 46

7. Un moteur à induction a un rendement de 85%, pour une puissance mécanique fournie de 1492 W. A cette puissance, le facteur de puissance est de 0,8 inductif. Déterminer tous les paramètres définissant la puissance électrique fournie au moteur.

8. Tracer le triangle des puissances pour le circuit parallèle de la Figure 47 où la résistance de 2Ω dissipe une puissance de 20 W .

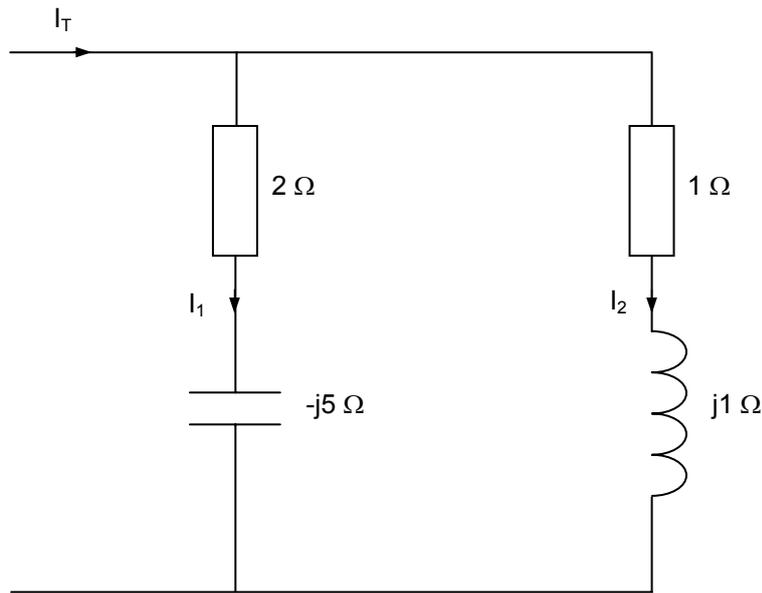


Figure 47

9. Déterminer le triangle des puissances pour la combinaison des trois charges suivantes :
- Charge n°1 : 250 VA , $\text{FP} = 0,5$ inductif ;
 - Charge n°2 : 180 W , $\text{FP} = 0,8$ capacitif ;
 - Charge n°3 : 300 VA , 100 vars inductifs.
- Calculer la puissance moyenne et la puissance réactive pour chacune des charges, dans les cas où celles-ci ne sont pas connues.
10. Un transformateur de puissance nominale 25 kVA alimente une charge de 12 kW ayant un facteur de puissance de $0,6$ inductif.
- 10.1. Déterminer en % le taux de charge du transformateur.
 - 10.2. Si ce transformateur doit alimenter d'autres charges ayant un facteur de puissance égal à l'unité, combien de kW sont encore disponibles avant d'atteindre la charge nominale du transformateur ?
 - 10.3. Quelles charges supplémentaires en kVA peut-on alimenter pour amener le transformateur à sa charge nominale, sachant que ces charges ont un facteur de puissance de $0,866$ capacitif ?
11. Soit un transformateur de 500 kVA à pleine charge alimentant un système dont le facteur de puissance est de $0,6$ inductif. On améliore ce facteur de puissance par l'adjonction de capacités, jusqu'à ce qu'il ait atteint la valeur de $0,9$ inductif. Déterminer le nombre de kvars nécessaires. Après correction du facteur de puissance, à quel taux (en %) le transformateur est-il chargé ?
12. Un groupe de moteurs asynchrones absorbant une puissance totale de 500 kW et de facteur de puissance $0,8$ inductif doit être remplacé partiellement par des moteurs synchrones de même rendement, mais dont le facteur de puissance est de $0,707$ capacitif. Au fur et à mesure de l'échange des moteurs, on constate que le facteur de puissance s'améliore. Quel pourcentage de la charge aura été remplacé lorsque le facteur de puissance atteindra $0,9$ inductif ?

Solutions

79 On a $\underline{V} = (150/\sqrt{2}) \angle 10^\circ$ et $\underline{I} = (5/\sqrt{2}) \angle -50^\circ = 3,54 \angle -50^\circ$

La puissance complexe est alors :

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = (106 \angle 10^\circ) \times (3,54 \angle 50^\circ) = 375 \angle 60^\circ \text{ VA} = 187,5 + j325 \text{ VA}$$

D'où l'on tire : $P = \text{Re}(\underline{V} \cdot \underline{I}^*) = 187,5 \text{ W}$

$$Q = \text{Im}(\underline{V} \cdot \underline{I}^*) = 325 \text{ vars inductifs}$$

$$S = |\underline{V} \cdot \underline{I}^*| = 375 \text{ VA}$$

$$FP = \cos 60^\circ = 0,5 \text{ inductif}$$

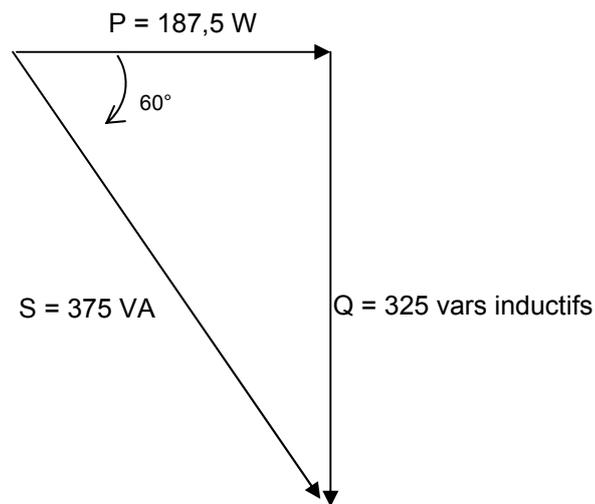


Figure 48

2. La tension appliquée peut se mettre sous la forme complexe $\underline{V} = (99/\sqrt{2}) \angle 30^\circ \text{ V} = 70 \angle 30^\circ \text{ V}$.

La puissance active est donnée par $P = VI \cos \varphi \Rightarrow I = \frac{940}{70 \cdot 0,707} \approx 19 \text{ A}$ capacitif. Ce courant est donc en

avance de $\arccos 0,707 = 45^\circ$ sur la tension, par conséquent $\underline{I} = 19 \angle 75^\circ \text{ A}$.

L'impédance du circuit est $\underline{Z} = \underline{V}/\underline{I} = \frac{70 \angle 30^\circ}{19 \angle 75^\circ} = 3,68 \angle -45^\circ \Omega = 2,6 - j2,6 \Omega$.

Comme $\underline{Z} = R - jX_C$ et que $X_C = 1/\omega C$, on a $R = 2,6 \Omega$ et $C = \frac{1}{6000 \times 2,6} \approx 64,1 \mu\text{F}$.

Autre méthode : en remplaçant I par sa valeur de 19 A dans $P = RI^2$, on obtient :

$$940 = 19^2 \times R \Rightarrow R \approx 2,6 \Omega.$$

Nous avons alors $\underline{Z} = Z \angle 45^\circ = 2,6 - jX_C$ et $X_C = 2,6$ d'où nous tirons :

$$C = 1/\omega X_C = 64,1 \mu\text{F}$$

13. La Figure 43 nous permet d'écrire $\underline{Z} = 3 + j6 - j2 = 5 \angle 53,1^\circ \Omega$ et

$$\underline{I} = \underline{V} / \underline{Z} = (50 \angle -90^\circ) / (5 \angle 53,1^\circ) = 10 \angle -143,1^\circ \text{ A} .$$

La puissance complexe est alors donnée par

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = (50 \angle -90^\circ) \cdot (10 \angle 143,1^\circ) = 500 \angle 53,1^\circ = 300 + j400 \text{ VA}$$

Les côtés du triangle (Figure 49) des puissances représenté sont $P = 300 \text{ W}$, $Q = 400 \text{ vars inductifs}$ et $S = 500 \text{ VA}$, le facteur de puissance est $\cos 53,1^\circ = 0,6$ inductif.

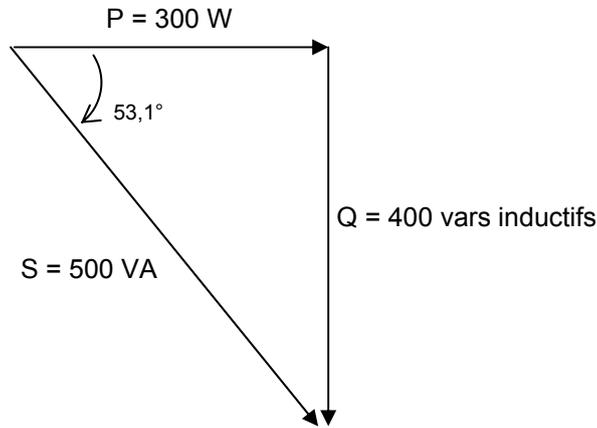


Figure 49

Autre méthode : en substituant $I = 10 \text{ A}$ dans l'équation donnant la puissance pour chaque élément, on obtient $P = RI^2 = 3 \cdot 10^2 = 300 \text{ W}$, $Q_{j6} = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ vars inductifs}$, $Q_{-j2} = 2 \cdot 10^2 = 200 \text{ vars capacitifs}$ et $Q = Q_{j6} + Q_{-j2} = 600 - 200 = 400 \text{ vars inductifs}$.

4. En posant $\underline{I}_T = 30 \angle 0^\circ \text{ A}$ (on choisit l'argument le plus simple, rien n'étant imposé), on a :

$$\underline{I}_2 = 30 \angle 0^\circ \times \left(\frac{5 - j3}{9 - j3} \right) = 18,45 \angle -12,55^\circ \text{ A}$$

$$\text{et } \underline{I}_1 = 30 \angle 0^\circ \times \left(\frac{4}{9 - j3} \right) = 12,7 \angle 18,45^\circ \text{ A}$$

on peut alors écrire les relations suivantes :

$$P = R_4 I_2^2 + R_5 I_1^2 = 4 \cdot (18,45)^2 + 5 \cdot (12,7)^2 = 2165 \text{ W}$$

$$Q = X \cdot I_1^2 = 3 \cdot (12,7)^2 = 483 \text{ vars capacitifs}$$

$$\underline{S} = P - jQ = 2165 - j483 = 2210 \angle -12,6^\circ \Rightarrow S = 2210 \text{ VA}$$

$$FP = P/S = 2165/2210 = 0,98 \text{ capacitif}$$

Les puissances ci-dessus peuvent également être calculées à partir de $\underline{Z}_{eq} = \frac{(5 - j3) \cdot 4}{9 - j3} = 2,4 - j0,533 \Omega$.

On obtient alors :

$$P = R \cdot I^2 = 2,4 \cdot 30^2 = 2160 \text{ W}$$

$$\text{Et } Q = 0,533 \cdot 30^2 = 479,7 \text{ vars capacitifs} .$$

5. En se référant à la Figure 45, on peut écrire :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{V}}{3 + j4} = \frac{\underline{V}}{5 \angle 53,1^\circ} \text{ et } \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{V}}{10}$$

Le rapport des modules des courants est $\frac{I_1}{I_2} = \frac{V/5}{V/10} = \frac{2}{1}$.

La relation $P = R I^2$ permet de calculer le rapport des puissances dans la résistance de 3Ω et dans celle de 10Ω :

$$\frac{P_3}{P_{10}} = \frac{R_1 \cdot I_1^2}{R_2 \cdot I_2^2} = \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{6}{5}$$

La puissance totale est donnée par $P_T = P_3 + P_{10}$. En divisant chaque membre de cette relation par P_{10} , on obtient $P_T/P_{10} = P_3/P_{10} + 1$ d'où :

$$P_{10} = 1100 \cdot (5/11) = 500 \text{ W et } P_3 = 1100 - 500 = 600 \text{ W}.$$

Comme $P = R \cdot I^2$, on a $3 \cdot I_1^2 = 600 \Rightarrow I_1 = 14,14 \text{ A}$.

En posant $\underline{V} = V \angle 0^\circ \text{ V}$, on peut écrire :

$$\underline{I}_1 = 14,14 \angle -53,1 = 8,48 - j11,31 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = 7,07 \angle 0^\circ = 7,07 \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 15,55 - j11,31 = 19,25 \angle -36^\circ \text{ A}$$

L'ampèremètre indique $19,25 \text{ A}$.

$$6. \text{ Branche 1 : } \underline{I}_1 = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_1} = \frac{20 \angle 60^\circ}{4 \angle 30^\circ} = 5 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\underline{S}_1 = \underline{V} \cdot \underline{I}_1^* = (20 \angle 60^\circ) \times (5 \angle -30^\circ) = 100 \angle 30^\circ = 86,6 + j50 \text{ VA}$$

$$\text{D'où l'on tire } P_1 = \text{Re}(\underline{V} \cdot \underline{I}_1^*) = 86,6 \text{ W}$$

$$Q_1 = \text{Im}(\underline{V} \cdot \underline{I}_1^*) = 50 \text{ vars inductifs}$$

$$S_1 = |\underline{V} \cdot \underline{I}_1^*| = 100 \text{ VA}$$

$$FP_1 = \frac{P_1}{S_1} = 0,866 \text{ inductif}$$

$$\text{Branche 2 : } \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_2} = \frac{20 \angle 60^\circ}{5 \angle 60^\circ} = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\underline{S}_2 = \underline{V} \cdot \underline{I}_2^* = (20 \angle 60^\circ) \times (4 \angle 0^\circ) = 80 \angle 60^\circ = 40 + j69,2 \text{ VA}$$

$$\text{D'où l'on tire } P_2 = \text{Re}(\underline{V} \cdot \underline{I}_2^*) = 40 \text{ W}$$

$$Q_1 = \text{Im}(\underline{V} \cdot \underline{I}_2^*) = 69,2 \text{ vars inductifs}$$

$$S_1 = |\underline{V} \cdot \underline{I}_2^*| = 80 \text{ VA}$$

$$FP_2 = \frac{P_2}{S_2} = 0,5 \text{ inductif}$$

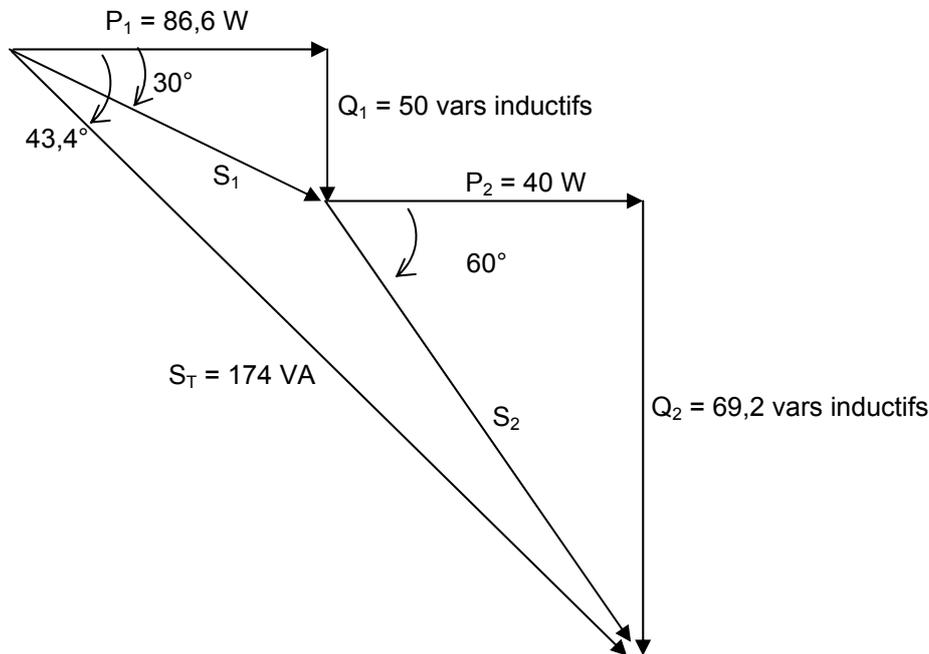


Figure 50

Les triangles ont été disposés de telle sorte que l'on puisse effectuer la somme vectorielle des vecteurs \vec{S} . En tenant compte des résultats ci-dessus et en se référant à la Figure 50, le triangle des puissances pour le circuit complet s'obtient comme suit :

$$P_T = P_1 + P_2 = 86,6 + 40 = 126,6 \text{ W}$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 50 + 69,2 = 119,2 \text{ vars inductifs}$$

Par ailleurs, comme $\underline{S}_T = P_T + jQ_T = 126,6 + j119,2 = 174 \angle 43,4^\circ \text{ VA}$, on a également :

$$S_T = |\underline{S}_T| = 174 \text{ VA et } FP_T = \frac{P_T}{S_T} = \frac{126,6}{174} = 0,727 \text{ inductif}$$

7. La puissance fournie au moteur est $P_f = \frac{P_{\text{sortie}}}{\eta} = \frac{1492}{0,85} = 1755 \text{ W}$. On en déduit :

$$S = \frac{1755}{0,8} = 2190 \text{ VA}, \quad \varphi = \arccos(0,8) = 36,9^\circ, \quad Q = 2190 \times \sin(36,9^\circ) = 1315 \text{ vars inductifs}$$

8. La relation $P = R I^2$ nous permet d'écrire $2 \times I_1^2 = 20 \Rightarrow I_1 = 3,16 \text{ A}$.

Comme $\underline{Z}_1 = 2 - j5 = 5,38 \angle -68,2^\circ \Omega$, nous avons $V = Z \cdot I_1 = 5,38 \times 3,16 = 17 \text{ V}$.

Posons $\underline{V} = 17 \angle 0^\circ \text{ V}$; il en résulte : $\underline{I}_1 = 3,16 \angle 68,2^\circ \text{ A} = 1,173 + j2,934 \text{ A}$

et $\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_2} = \frac{17 \angle 0^\circ}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} = 12 \angle -45^\circ \text{ A} = 8,485 - j8,485 \text{ A}$.

Et $\underline{I}_T = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 11,1 \angle -29,8^\circ \text{ A}$.

Afin de calculer les côtés du triangle des puissances, nous devons connaître S_T :

$$\underline{S}_T = \underline{V} \cdot \underline{I}_T^* = (17 \angle 0^\circ) \times (11,1 \angle 29,8^\circ) = 189 \angle 29,8^\circ = 164 + j94 \text{ VA}$$

Nous en déduisons $P_T = 164 \text{ W}$, $Q_T = 94 \text{ vars inductifs}$, $S_T = 189 \text{ VA}$, $FP = 164/189 = 0,868$ inductif

9. Charge n°1 : sont connus $S_1 = 250 \text{ VA}$ et $FP_1 = 0,5$ inductifs. $P_1 = S_1 \times FP_1 = 250 \times 0,5 = 125 \text{ W}$

$\varphi_1 = \arccos 0,5 = 60^\circ$, $Q_1 = S_1 \times \sin(\varphi_1) = 250 \times \sin(60^\circ) = 216 \text{ vars inductifs}$

Charge n°2 : sont donnés : $P_2 = 180 \text{ W}$ et $FP_2 = 0,8$ capacitif.

$$S_2 = \frac{P_2}{FP_2} = \frac{180}{0,8} = 225 \text{ VA}, \varphi_2 = \arccos 0,8 = 36,9^\circ, Q_2 = 225 \times \sin(36,9^\circ) = 135 \text{ vars capacitifs}$$

Charge n°3 : on connaît $S_3 = 300 \text{ VA}$ et $Q_3 = 100 \text{ vars inductifs}$.

$$\varphi_3 = \arcsin\left(\frac{Q_3}{S_3}\right) = \arcsin\left(\frac{100}{300}\right) = 19,5^\circ, P_3 = S_3 \times \cos(\varphi_3) = 300 \times \cos(19,5^\circ) = 283 \text{ W}$$

Nous pouvons alors écrire : $P_T = 125 + 180 + 283 = 588 \text{ W}$

$Q_T = 216 - 135 + 100 = 181 \text{ vars inductifs}$

Comme $\underline{S}_T = P_T + jQ_T = 588 + j181 = 616 \angle 17,1^\circ \text{ VA}$, nous avons $S_T = 616 \text{ VA}$ et

$FP = P_T/S_T = 588/616 = 0,955$ inductif

Cet exercice (n°9) est également susceptible d'être résolu graphiquement. Il faut tracer les trois triangles des puissances en prenant soin de disposer les vecteurs \vec{S} de telle sorte que l'origine du n+1 ième soit confondue avec l'extrémité du n ième de manière à ce que l'on puisse aisément les additionner comme le montre la Figure 51.

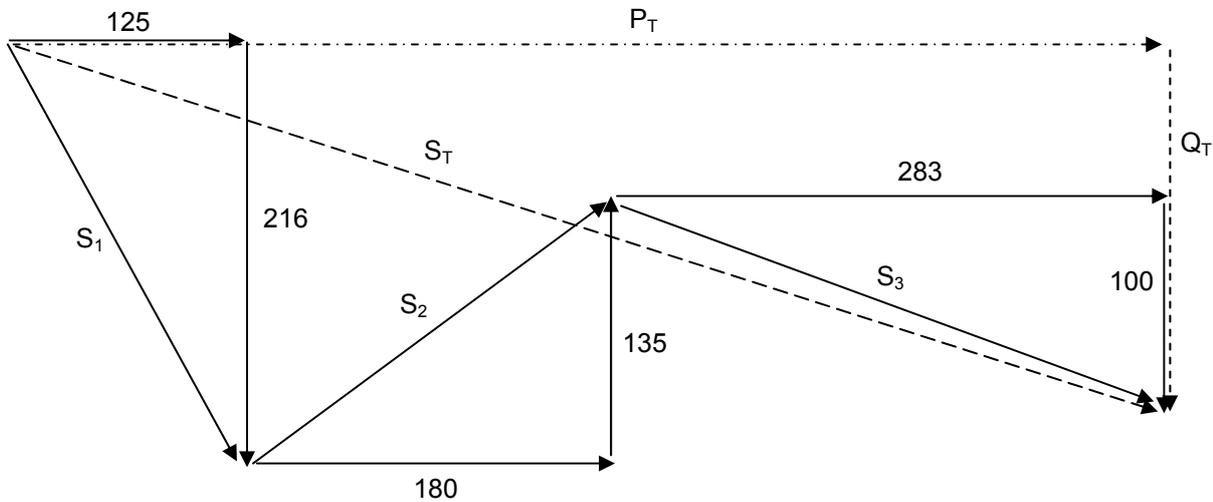


Figure 51

10.1. Pour la charge de 12 kW, on a $S = \frac{P}{FP} = \frac{12 \cdot 10^3}{0,6} = 20 \text{ kVA}$. Par conséquent le transformateur est chargé à $\frac{20}{25} \times 100 = 80 \%$.

Comme $\varphi = \arccos(0,6) = 53,1^\circ$, on a $Q = S \cdot \sin \varphi = 20 \cdot \sin(53,1^\circ) = 16 \text{ kvars inductifs}$.

10.2. La charge additionnelle possède un facteur de puissance égal à 1, par conséquent la puissance réactive Q reste inchangée. On a alors pour la charge nominale un angle $\varphi' = \arcsin\left(\frac{16}{25}\right) = 39,8^\circ$ et une puissance totale $P_T = S' \cdot \cos \varphi' = 25 \cdot \cos(39,8^\circ) = 19,2 \text{ kW}$.

On en déduit que la charge additionnelle est égale à : $P_T - P = 19,2 - 12 = 7,2 \text{ kW}$.

Ce résultat peut parfaitement s'obtenir graphiquement en traçant le triangle des puissances comme le montre la Figure 69.

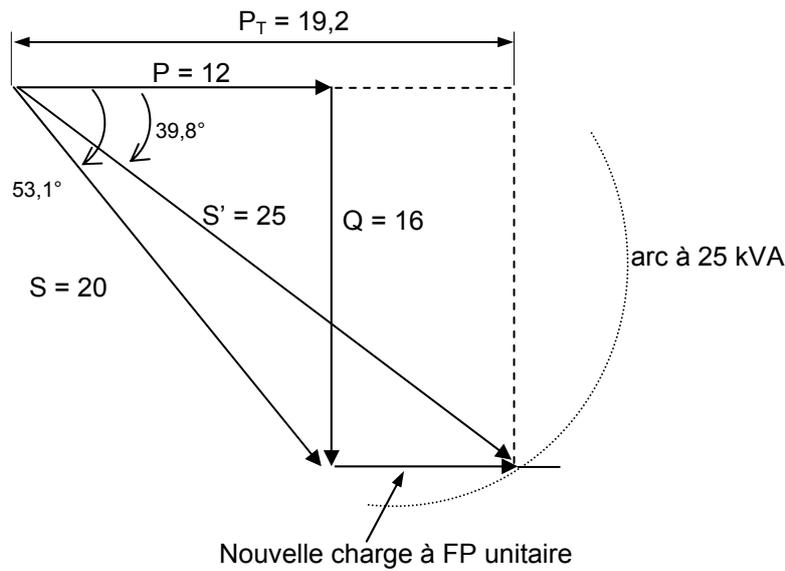


Figure 52

10.3. En ajoutant les charges S_2 avec un angle $\varphi_2 = \arccos(0,866) = 30^\circ$, il faut calculer le nouvel angle φ' entre P_T et S_T . Ce problème peut être résolu graphiquement, voir la Figure 53, en traçant le plus précisément possible les triangles des puissances ou bien à l'aide de relations trigonométriques.

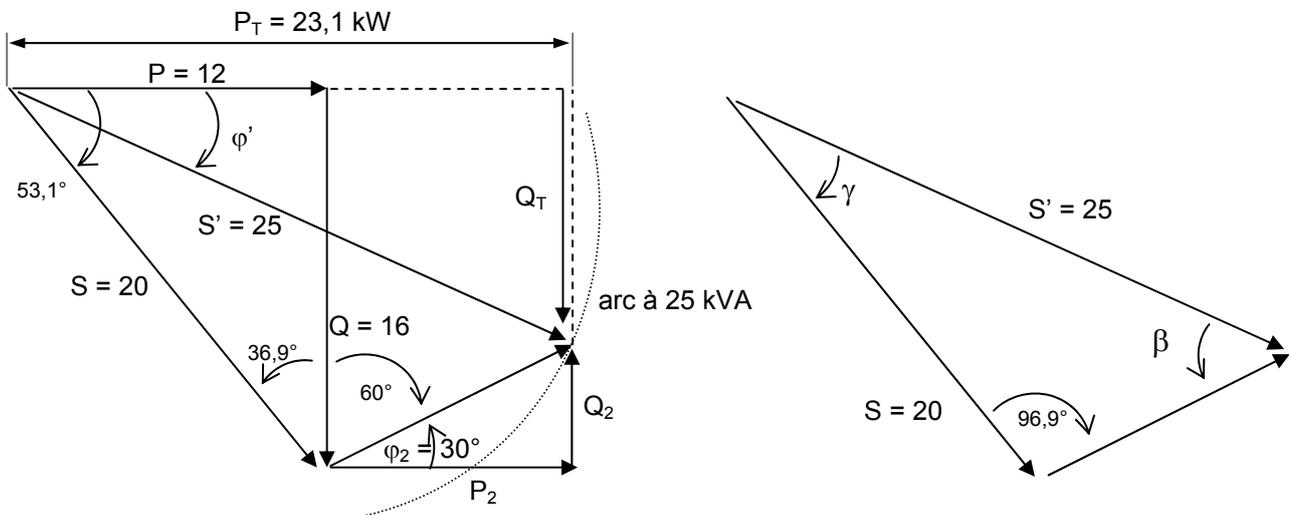


Figure 53

En considérant la Figure 53, nous pouvons écrire : $\frac{25}{\sin(96,9^\circ)} = \frac{20}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = 0,795 \Rightarrow \beta = 52,6^\circ$.

Nous en déduisons : $\gamma = 180^\circ - (96,9 + 52,6) = 30,5^\circ$ et $\varphi' = 53,1^\circ - 30,5^\circ = 22,6^\circ$

La puissance active et la puissance réactive à pleine charge sont respectivement :

$P_T = 25 \cdot \cos(22,6^\circ) = 23,1 \text{ kW}$ et $Q_T = 25 \cdot \sin(22,6^\circ) = 9,6 \text{ kvars inductifs}$.

Pour les charges additionnelles, nous avons $P_2 = 23,1 - 12 = 11,1$ kW et

$$Q_2 = 16 - 9,6 = 6,4 \text{ kvars capacitifs .}$$

Comme $\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 11,1 + j6,4 = 12,8 \angle -30^\circ$ kVA, $S_2 = 12,8$ kVA .

On peut ainsi ajouter une charge de 12,8 kVA avec un facteur de puissance de 0,866 capacitifs aux 12 kW avec un facteur de puissance de 0,6 inductif, pour amener le transformateur à sa charge nominale de 25 kVA.

Autre méthode : la Figure 53 permet d'écrire pour un angle $\varphi_2 = 30^\circ$:

$$P_2 = S_2 \times \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times S_2 \text{ et } Q_2 = S_2 \times \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \times S_2 .$$

On a également : $(S')^2 = (P + P_2)^2 + (Q - Q_2)^2$ ce qui donne après substitution :

$$25^2 = \left(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times S_2\right)^2 + \left(16 - \frac{1}{2} \times S_2\right)^2 \Rightarrow S_2 = 12,8 \text{ kVA}$$

11. Pour le transformateur à pleine charge, on peut écrire (voir Figure 54) :

$$P = VI \cos \varphi = 500 \times 0,6 = 300 \text{ kW et } \varphi = \arccos(0,6) = 53,1^\circ$$

$$Q = VI \sin \varphi = 500 \times \sin(53,1^\circ) = 400 \text{ kvars inductifs .}$$

Si le $FP = 0,9$ inductif, on a : $\varphi' = \arccos(0,9) = 26^\circ$

$$\text{et } S' = \frac{300}{0,9} = 333 \text{ kVA, } Q' = 333 \sin(26) = 146 \text{ kvars inductifs .}$$

On en déduit que le nombre de kvars capacitifs est : $Q - Q' = 400 - 146 = 254$ et que le transformateur est

$$\text{chargé à : } \frac{333}{500} \times 100 = 66,7 \%$$

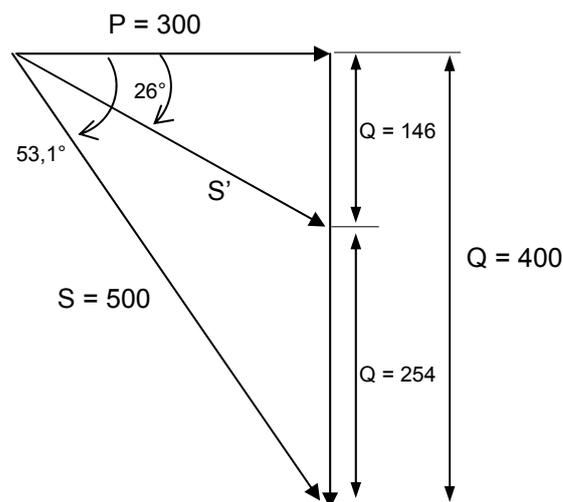


Figure 54

12. Etant donné que les moteurs synchrones ont le même rendement que les moteurs asynchrones, la puissance moyenne totale absorbée sur le réseau reste constante et égale à 500 kW. Avant de remplacer les moteurs, on avait :

$$S = \frac{500}{0,8} = 625 \text{ kVA}, \quad \varphi = \arccos(0,8) = 36,9^\circ, \quad Q = 625 \times \sin(36,9^\circ) = 375 \text{ kvars inductifs.}$$

Après on a FP = 0,9 inductif et $\varphi' = \arccos(0,9) = 26^\circ$, $S' = \frac{500}{0,9} = 556 \text{ kVA}$,

$$Q' = 556 \times \sin(26^\circ) = 243 \text{ kvars inductifs.}$$

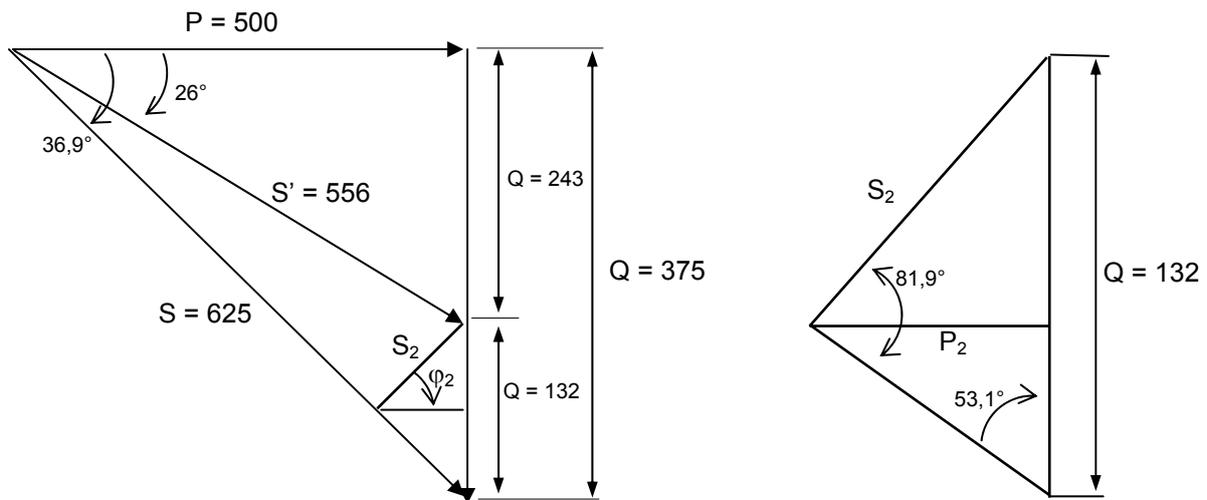


Figure 55

Sachant que le facteur de puissance des moteurs synchrones est de 0,707 capacitif, on a $\varphi_2 = \arccos(0,707) = 45^\circ$. En se référant à la Figure 55, on peut écrire :

$$\frac{S_2}{\sin(53,1^\circ)} = \frac{132}{\sin(81,9^\circ)} \Rightarrow S_2 = 106,5 \text{ kVA.}$$

On en déduit que $P_2 = 106,5 \times \cos(45^\circ) = 75,3 \text{ kW}$ et que $\frac{75,3}{500} \times 100 = 15 \%$ des moteurs asynchrones ont été remplacés.

Conditions du transfert maximum de puissance d'une source de tension alternative vers une impédance :

Soit un générateur de tension alternative dont les caractéristiques sont :

- tension efficace à vide E_g
- impédance interne Z_g

La question que l'on se pose est : quelle est l'impédance ($Z_c = R_c + jX_c$) à connecter aux bornes du générateur afin que la puissance dissipée dans cette dernière soit maximum ?

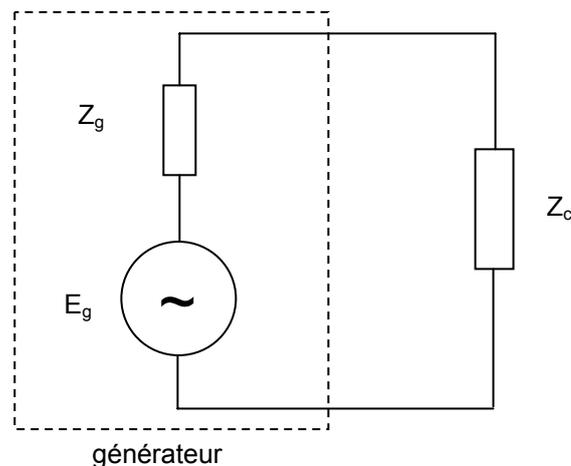


Figure 56

La puissance active dissipée dans l'impédance Z_c est égale à : $P = R_c I^2$.

Calculons le courant I circulant dans la maille :
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_c}$$

$$P = R_c I^2 = R_c \underline{I} \underline{I}^* = R_c \left(\frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_c} \right) \left(\frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_c} \right)^* = R_c \left(\frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_c} \right) \left(\frac{\underline{E}_g^*}{(\underline{Z}_g + \underline{Z}_c)^*} \right)$$

en posant $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$ et $\underline{Z}_c = R_c + jX_c$, il vient

$$P = E_g^2 \frac{R_c}{(R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2}$$

Il faut déterminer les valeurs de R_c et de X_c telles que P dissipée dans Z_c soit maximum. Pour cela, le dénominateur doit être le plus petit possible. On remarque immédiatement que l'on peut annuler le terme $(X_g + X_c)$ en faisant :

$$X_c = -X_g$$

Dés lors, l'expression de P devient :

$$P = E_g^2 \frac{R_c}{(R_g + R_c)^2}$$

Il reste à trouver le maximum de $\frac{R_c}{(R_g + R_c)^2}$

On calcule la dérivée par rapport à R_c et on cherche pour quelle valeur de R_c la dérivée s'annule :

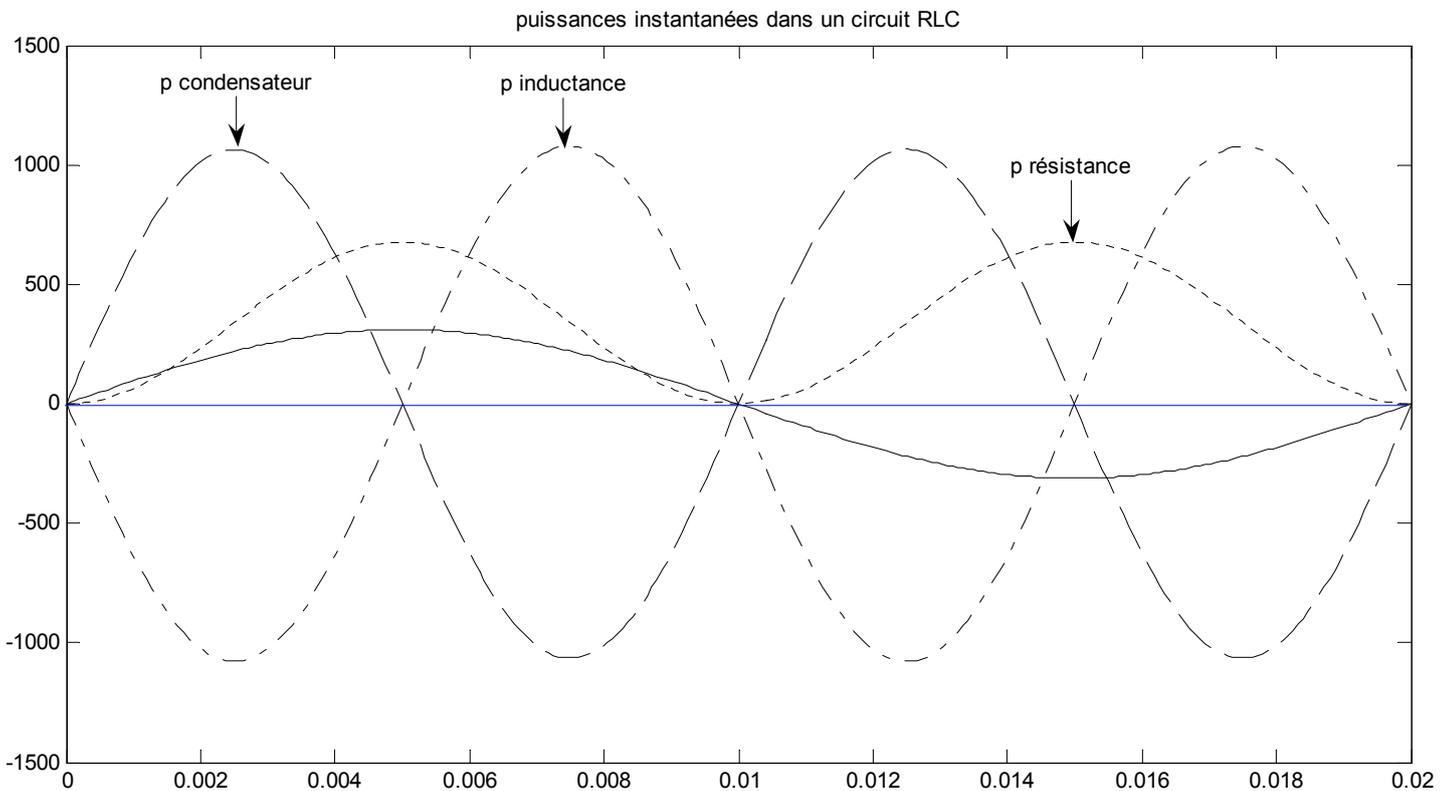
$$\frac{\partial}{\partial R_c} \left(\frac{R_c}{(R_g + R_c)^2} \right) = \frac{1 \times (R_g + R_c)^2 - 2 \times R_c \times (R_g + R_c)}{(R_g + R_c)^4} = \frac{R_g - R_c}{(R_g + R_c)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial R_c} \left(\frac{R_c}{(R_g + R_c)^2} \right) = 0 \Rightarrow R_c = R_g$$

L'adaptation d'impédance a donc lieu pour $R_c = R_g$ et $X_c = -X_g$.

Donc il y a adaptation d'impédance si $\underline{Z}_c = \underline{Z}_g^*$.

La puissance reçue par l'impédance \underline{Z}_c vaut alors : $P = \frac{E_g^2}{4R_c}$



Exercices de « monophasé » :

1. Un réseau 120 V, 50 Hz alimente une résistance $R = 50 \Omega$ et une inductance $L = 0,12 \text{ H}$.
 - 1.1. R et L sont montées en série. Calculer l'intensité du courant et son déphasage par rapport à la tension, ainsi que la valeur de la puissance active absorbée.
 - 1.2. R et L sont montées en dérivation. Calculer; pour chaque élément, l'intensité du courant et son déphasage par rapport à la tension, ainsi que la valeur de la puissance active absorbée. Quelle est la valeur du courant total fourni par le réseau ?
2. Une résistance de 800Ω , une inductance de $1,1 \text{ H}$ et une capacité de 2 microfarads , associées en série, sont parcourues par un courant sinusoïdal monophasé de valeur efficace 100 mA et de pulsation 10^3 rad/s .
 - 2.1. Calculer l'impédance du montage.
 - 2.2. Calculer les tensions aux bornes de chaque élément et de l'ensemble.
 - 2.3. Calculer le déphasage du courant sur la tension.
 - 2.4. Le montage est-il capacitif ou inductif ? Justifier votre réponse.
 - 2.5. Calculer la puissance active consommée par cet ensemble.
3. On applique entre les bornes A et B d'un circuit électrique une tension alternative sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 150 V .
 - 3.1. On dispose en série entre les bornes A et B une résistance $R = 0,1 \text{ k}\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 20 \mu\text{F}$. Déterminer :
 - 3.1.1. l'intensité efficace du courant ;
 - 3.1.2. les tensions efficaces aux bornes de la résistance et aux bornes du condensateur ;
 - 3.1.3. la puissance active absorbée par chacun des éléments du circuit ;
 - 3.1.4. le facteur de puissance de l'ensemble résistance-condensateur-
 - 3.2. On ajoute entre les bornes A et B, en série avec les deux éléments précédents, une bobine inductive d'inductance L et de résistance négligeable.
 - 3.2.1. Calculer la valeur à donner à l'inductance L pour que l'intensité du courant soit en phase avec la tension entre les bornes A et B ;
 - 3.2.2. Déterminer alors :
 - l'intensité efficace du courant,
 - la tension efficace aux bornes de la bobine.
4. On applique une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace 100 V et de fréquence 50 Hz entre les bornes A et B d'un circuit comprenant, disposées en série, une résistance $R = 100 \Omega$ et une bobine d'inductance $L = 1/\pi \text{ H}$.
 - 4.1. Déterminer :
 - 4.1.1. L'intensité efficace du courant traversant le circuit.
 - 4.1.2. Les tensions efficaces aux bornes de chacun des éléments.
 - 4.1.3. Les puissances actives et réactives absorbées par chaque élément.
 - 4.2. On place, entre les bornes A et B, en série avec les appareils précédents, un condensateur de capacité C afin de ramener à l'unité le $\cos \varphi$ de l'ensemble. Calculer :
 - 4.2.1. L'intensité efficace du courant dans le circuit ainsi modifié.
 - 4.2.2. Les tensions efficaces aux bornes de chacun des trois éléments.

5. On applique une tension $u(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \sin(100t)$ volts aux bornes A et B d'un circuit RLC série.
- 5.1. Calculer la valeur efficace I du courant circulant dans le circuit ainsi que son déphasage par rapport à la tension d'alimentation si $R = 10 \Omega$, $L = 0,5 \text{ H}$ et $C = 5,10 \mu\text{ F}$. En déduire la valeur de la puissance active consommée par le circuit.
 - 5.2. Déterminer quelle devrait être la valeur de C pour que le courant I soit en phase avec la tension d'alimentation. En déduire la nouvelle valeur de la tension aux bornes de chaque élément ainsi que la nouvelle puissance active consommée par le circuit.
6. Une source de tension alternative sinusoïdale alimente un circuit composé d'une inductance $L = 0,5 \text{ H}$ et d'une résistance $R = 250 \Omega$ associées en série.
La valeur instantanée de la tension délivrée par cette source est donnée en volts par la relation $v = 220 \sqrt{2} \sin 100 \pi t$ ou t est exprimé en secondes.
- Calculer :
- 6.1. La fréquence de la tension d'alimentation
 - 6.2. L'impédance de l'inductance.
 - 6.3. La valeur efficace de l'intensité du courant dans le circuit et son déphasage sur v .
 - 6.4. Les valeurs efficaces des tensions U_L et U_R aux bornes de L et R .
 - 6.5. Les puissances active, réactive et apparente fournies par la source.
 - 6.6. Le facteur de puissance du circuit.
 - 6.7. La capacité C du condensateur à installer en parallèle sur ce circuit pour que le facteur de puissance du montage complet devienne égal à 1.
7. Une installation électrique monophasée est alimentée en courant alternatif $380 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$. Elle comprend, montés en dérivation, les appareils suivants :
- a. 50 lampes de 100 W ;
 - b. un moteur dont le rendement industriel est de $0,85$, le $\cos \varphi$ de $0,8$, qui fournit une puissance utile de 4 kW et absorbe de la puissance réactive;
 - c. une bobine ayant une résistance de 5Ω et une inductance de $0,1 \text{ H}$.
- On demande de calculer :
- 7.1. L'intensité du courant absorbé par l'installation.
 - 7.2. Le facteur de puissance de l'installation.
 - 7.3. La capacité du condensateur qu'il faut ajouter, en dérivation, pour ramener à l'unité le facteur de puissance de l'installation.

Tensions et courants polyphasés

Définition : On appelle « tensions ou courants polyphasés » un ensemble de p tensions ou de p courants de même fréquence, ayant même amplitude et présentant entre eux des différences de phases de $\frac{2\pi}{p}$.

Dans la pratique, on rencontre surtout :

- Les tensions et les courants triphasés (déphasage de $\frac{2\pi}{3}$) pour la production et le transport de l'énergie électrique.
- Les tensions et les courants hexaphasés (déphasage de $\frac{\pi}{3}$) dans le cadre du redressement industriel afin d'obtenir des tensions continues présentant un faible taux d'ondulation résiduelle.

Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons uniquement au « triphasé ».

Durant la période 1880-1900, des industriels, tenants du "continu" et tenants de "l'alternatif" ont confronté leur réalisations. Le "triphase" a fini par l'emporter. Aux USA, la lutte entre Edison (tenant du continu) et Westinghouse (tenant de l'alternatif) fût particulièrement âpre.

Le triphasé possède les avantages suivants :

- Pour une puissance donnée, une ligne de transport triphasé demande moins de cuivre (ou d'aluminium) qu'une ligne monophasée de même tension (et aussi qu'une ligne continu).
- Les moteurs et les alternateurs triphasés sont plus petits, plus simples et moins coûteux que les moteurs et les alternateurs monophasés de même capacité de même tension et de même vitesse. L'écart est encore plus significatif avec le continu.

Le transport en triphasé permet d'économiser du câble et de diminuer les pertes par effet joule : 3 fils de phases suffisent (le neutre n'est pas transporté, il est "recréé" au niveau du dernier transformateur). En effet, le déphasage entre chaque phase est tel que, pour un système équilibré, la somme des trois courants est nulle (si les trois courants ont la même amplitude, alors: $\cos(x) + \cos(x+2\pi/3) + \cos(x+4\pi/3)=0$). Et donc, en plus de faire l'économie d'un câble sur les longues distances, on économise les pertes par effets joules (un câble supplémentaire traversé par un courant impliquerait des pertes supplémentaires). On voit déjà là un grand intérêt à avoir choisi ces déphasages !

On peut essayer de faire comprendre l'avantage du système triphasé en le comparant à un moteur à essence. Un moteur à un seul cylindre peut être assimilé à une machine monophasée. De même, un moteur à trois cylindres peut se comparer à une machine électrique triphasée. Les pistons identiques montent et descendent à l'intérieur de cylindres identiques, mais pas en même temps. Il en résulte un moteur qui tourne avec moins de vibrations et qui peut être plus puissant...

Intérêt pour la production de l'électricité :

- De meilleurs alternateurs

Plus de 95 % de l'énergie électrique est produite par des alternateurs synchrones, des machines électromécaniques fournissant des tensions de fréquences proportionnelles à leur vitesse de rotation. Ces machines sont moins coûteuses et ont un meilleur rendement que les machines à courant continu (dynamos) qui délivrent des tensions continues (95 % au lieu de 85 %).

Les alternateurs (machines synchrones) triphasés qui produisent l'énergie électrique ont un meilleur rendement et un meilleur rapport puissance/poids qu'un alternateur monophasé de même puissance.

- Annuler la puissance fluctuante

Les alternateurs de puissance doivent nécessairement produire un système de tensions polyphasées :

Supposons qu'un alternateur monophasé délivre 1000 A sous une tension de 1000 V et de fréquence 50 Hz.

L'expression de la puissance délivrée se met sous la forme :

$$P = U \sin(\omega t) \cdot I \sin(\omega t + \varphi)$$

$$P = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) = P_{active} + P_{fluctuante}$$

Donc la puissance active délivrée (le premier terme de la somme) est comprise entre 0 et 1 MW (elle dépend du facteur de puissance de la charge), mais la puissance fluctuante (le deuxième terme de la somme) est une puissance sinusoïdale de fréquence 100 Hz et d'amplitude obligatoirement égale à 1 MW.

La turbine, du fait de son inertie, tourne avec une vitesse mécanique quasi constante, or elle doit à chaque instant fournir une puissance identique donc également fluctuante. Ces oscillations de puissance se traduisent par des oscillations de couples qui sont, en majeure partie, absorbées par l'élasticité de l'arbre et finissent par provoquer sa destruction.

Pour annuler cette puissance fluctuante, il faut produire n phases ($n \geq 2$) déphasées convenablement dans le temps.

Par exemple en diphasé :

$$P = U \sin(\omega t) \cdot I \sin(\omega t + \varphi) + U \cos(\omega t) \cdot I \cos(\omega t + \varphi)$$

$$P = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) + UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

$$P = 2UI \cos \varphi$$

La puissance fluctuante a bien été annulée. Le choix qui a été fait pour l'ensemble des réseaux du monde est $n = 3$.

Choix de la fréquence :

L'éclairage par lampes à incandescence nécessite une fréquence d'au moins 40 Hz car les variations de brillance au cours d'une période sont gênantes en dessous de cette valeur. Les transformateurs nécessitent une fréquence pas trop basse pour fonctionner correctement, mais pas trop haute non plus car les pertes fer augmentent en fonction de la fréquence voire du carré de celle-ci.

Les moteurs à courant continu universel (à collecteur donc) s'accommodent mieux d'une fréquence assez basse qui rend les commutations plus faciles. Pour répondre à ces exigences, on a choisi 50 Hz pour fréquence du réseau en Europe tandis que l'Amérique du nord a adopté la fréquence de 60 Hz.

Les avions fonctionnent en 400 Hz, ceci augmente beaucoup les pertes fer mais diminue la masse des transformateurs par environ 8 par rapport à une fréquence de 50 Hz.

Systeme triphasé

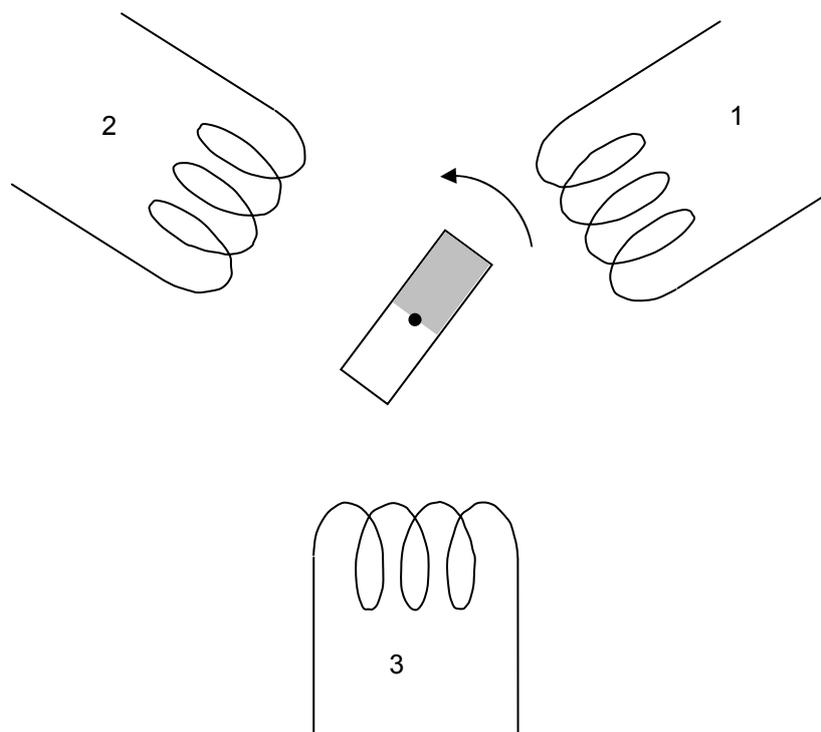


Figure 57

La Figure 57 représente un alternateur triphasé élémentaire, les forces électromotrices induites dans les trois bobines identiques et décalées les unes par rapport aux autres de 120° , sont déphasées l'une par rapport à l'autre de $\omega \cdot t = 120^\circ$, soit deux tiers de période. En faisant tourner l'aimant dans le sens indiqué sur la figure, la f.é.m. est d'abord maximale dans une bobine (par exemple la n°1), suivie des maxima dans les bobines 2 et 3.

Ceci pour une séquence 123.

Cette séquence peut se déduire du diagramme vectoriel de la Figure 58 (pour une rotation dans le sens direct trigonométrique) où chacun des vecteurs passe par un point fixe dans l'ordre suivant : 1 – 2 – 3 – 1 – 2 – 3 -..., la représentation des tensions instantanées de la Figure 59 où les maxima se produisent dans le même ordre permet d'aboutir à la même conclusion. Un observateur voit les vecteurs qui tournent dans le sens direct défiler selon la séquence 123.

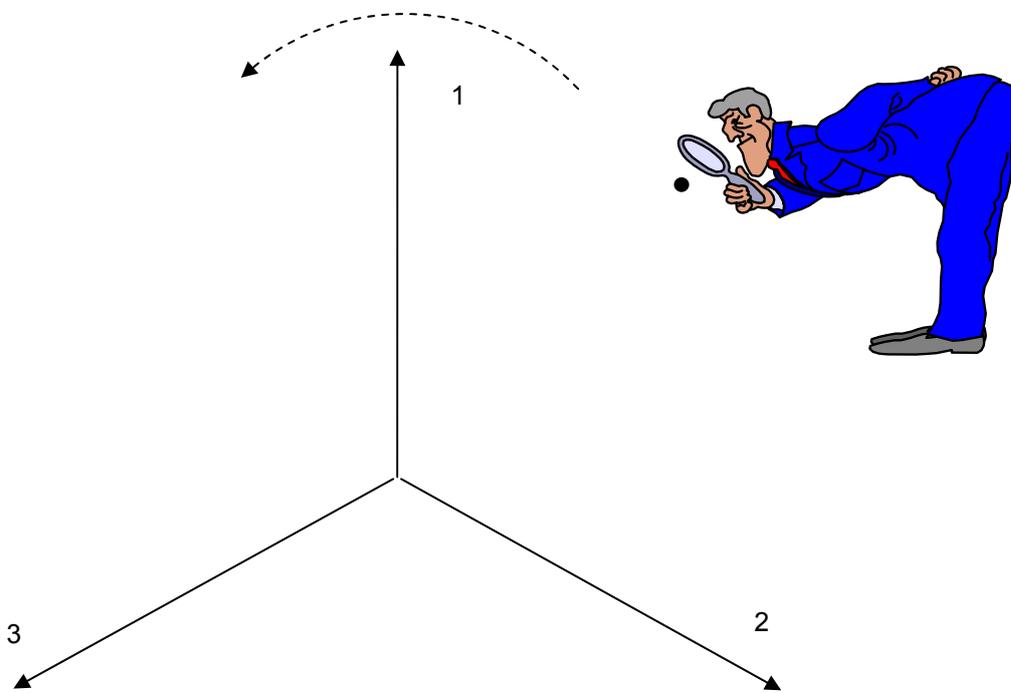


Figure 58 séquence 123

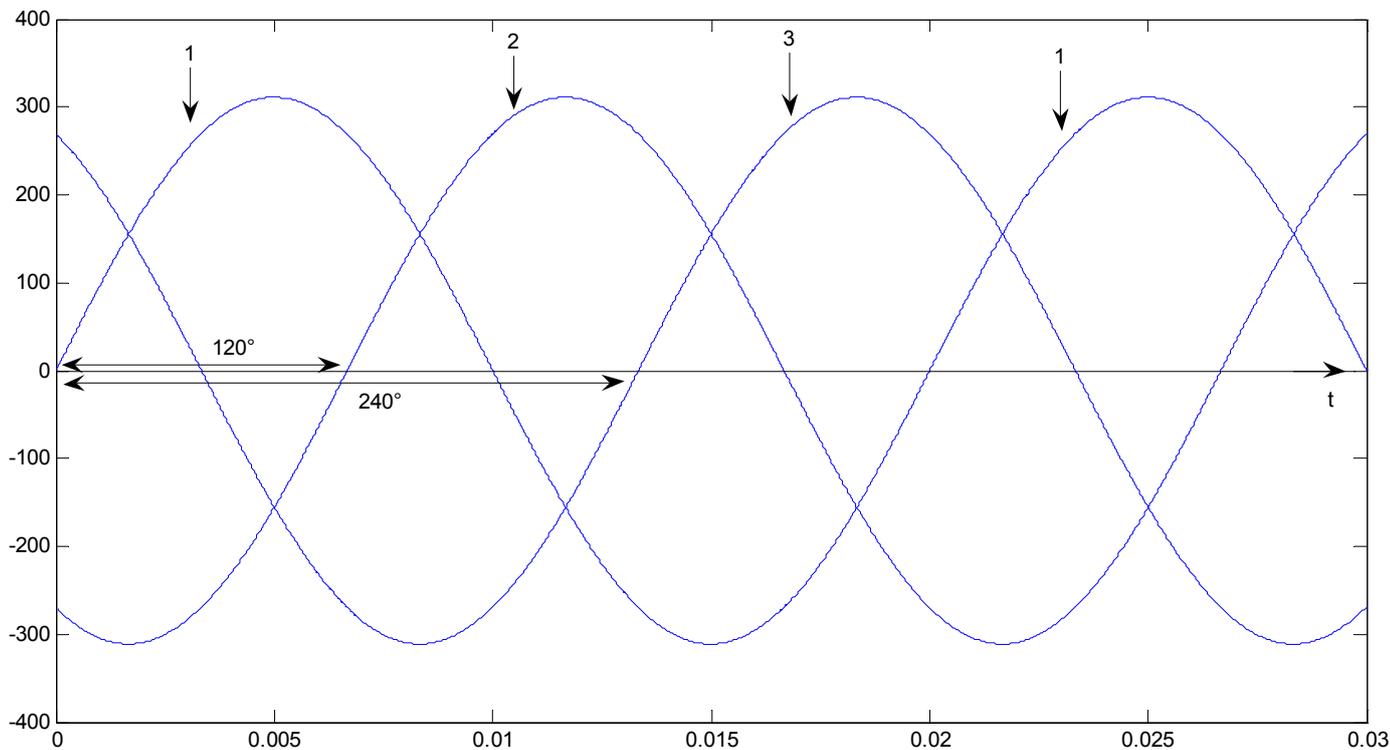


Figure 59 séquence 123

La rotation de l'aimant de l'alternateur dans le sens inverse (sens des aiguilles d'une montre) entraîne une séquence 321 comme le montre la Figure 60 ainsi que la Figure 61. Un observateur voit les vecteurs qui tournent dans le sens direct défiler selon la séquence 321.

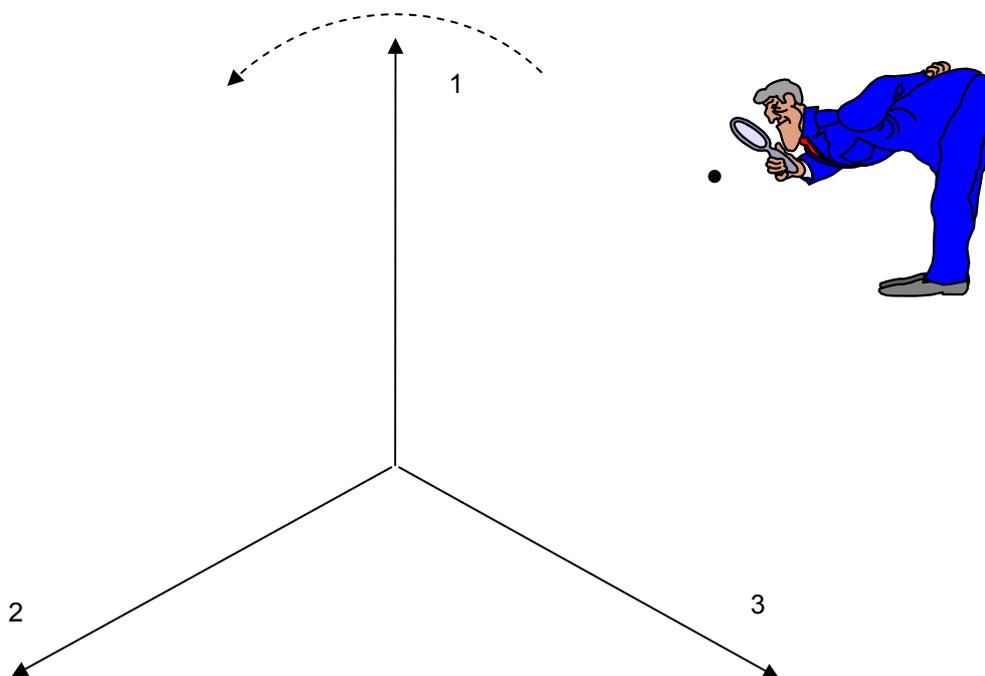


Figure 60

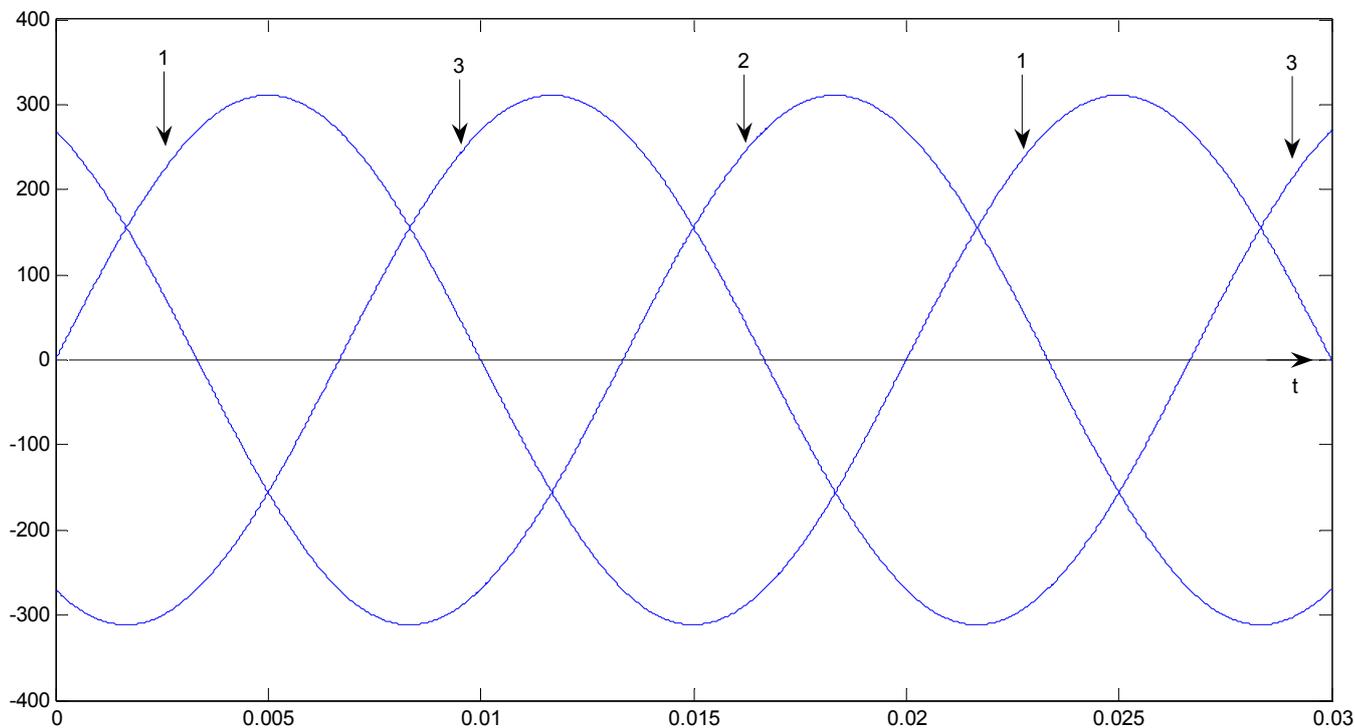


Figure 61

Tensions dans un système triphasé

Dans un système triphasé, le choix d'une tension comme tension de référence avec un angle de phase égale à zéro degré, détermine la phase de toutes les autres tensions du système ; nous choisissons par la suite la tension U_{23} comme tension de référence. Les représentations vectorielles des Figure 62 et Figure 63 indiquent les tensions du système pour les séquences 123 (a) et 321 (b).

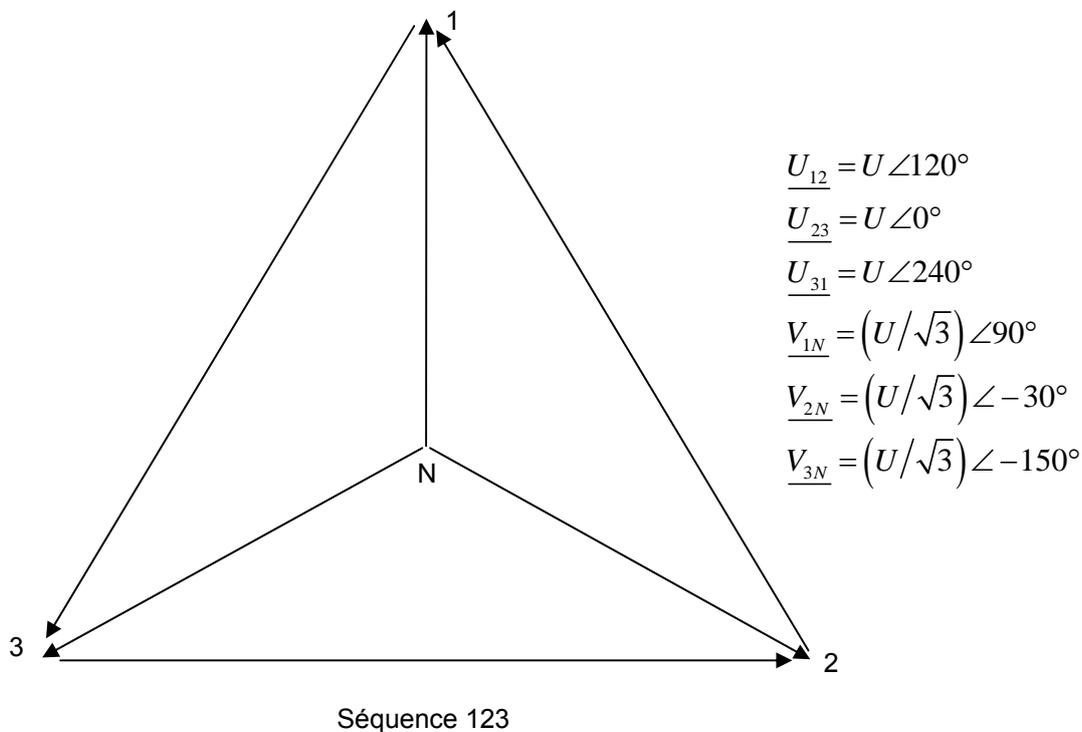


Figure 62

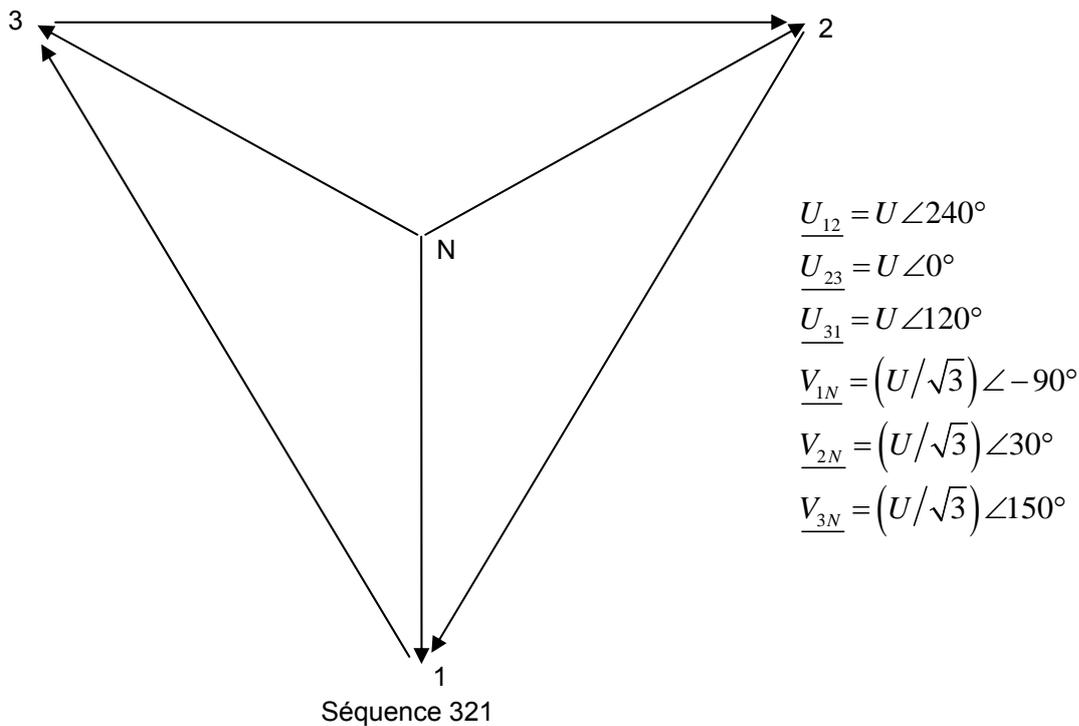


Figure 63

On appelle « tension composée » d'un système triphasé ou encore « tension entre phases » la différence de potentiel existant entre l'une quelconque des paires de conducteurs 1 et 2, 2 et 3, et 3 et 1 du système. Les tensions composées sont notées : U.

De même, on appelle « tension simple » d'un système triphasé, la d.d.p. existant entre n'importe lequel des conducteurs 1, 2, et 3 et le conducteur neutre. Les tensions simples sont notées : V.

Relation entre tension simple et tension composée

La Figure 62 aussi bien que la Figure 63 montre qu'une tension composée est un vecteur obtenu par la différence entre deux tensions simples selon la figure suivante :

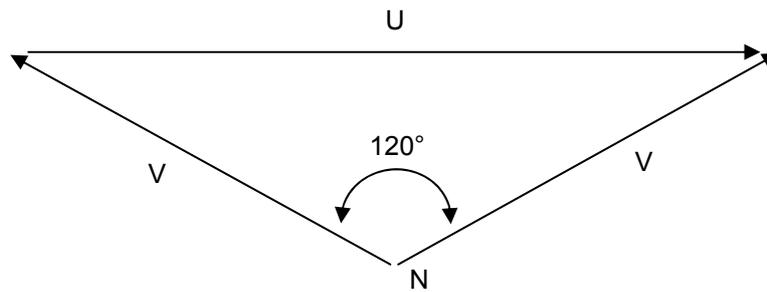


Figure 64

Le triangle de la Figure 64 est isocèle (deux côtés égaux à V), donc les deux autres angles différents de 120° sont égaux et de valeur : $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Dans ce triangle, on a :

$$U^2 = V^2 + V^2 - 2 \cdot V \cdot V \cdot \cos(120^\circ) = 2V^2 - 2 \cdot V^2 \cdot -\frac{1}{2} = 3 \cdot V^2 \Rightarrow \boxed{U = \sqrt{3} \cdot V}$$

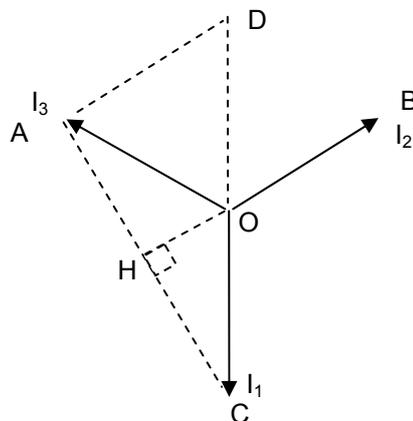
Réseau équilibré

Le système est dit équilibré lorsque les 3 courants, absorbés sur les lignes par l'ensemble des récepteurs, ont la même intensité efficace. Les 3 vecteurs intensité sont déphasés de 120° les uns par rapport aux autres.

$$\vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{OD} = -\vec{OC} = -\vec{I}_1$$

$$\vec{I}_3 - \vec{I}_1 = \vec{CA} = 2\vec{HA}$$

$$|\vec{I}_3 - \vec{I}_1| = \sqrt{3} \cdot |\vec{I}_1|$$



La somme des trois courants est constamment nulle :

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = 0$$

La différence de deux courants est égale à l'intensité de l'un des courants multipliée par $\sqrt{3}$. Elle est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au troisième courant, ainsi, si $i_2 = I_{MAX} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$:

$$i_3 - i_1 = \sqrt{3} \cdot I_{MAX} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Les montages utilisés avec les courants triphasés sont de deux sortes :

- les montages en "étoile",
- les montages en "triangle".

Montage en étoile (Y)

Pour que le montage soit équilibré, les trois impédances groupées en étoile sont identiques.

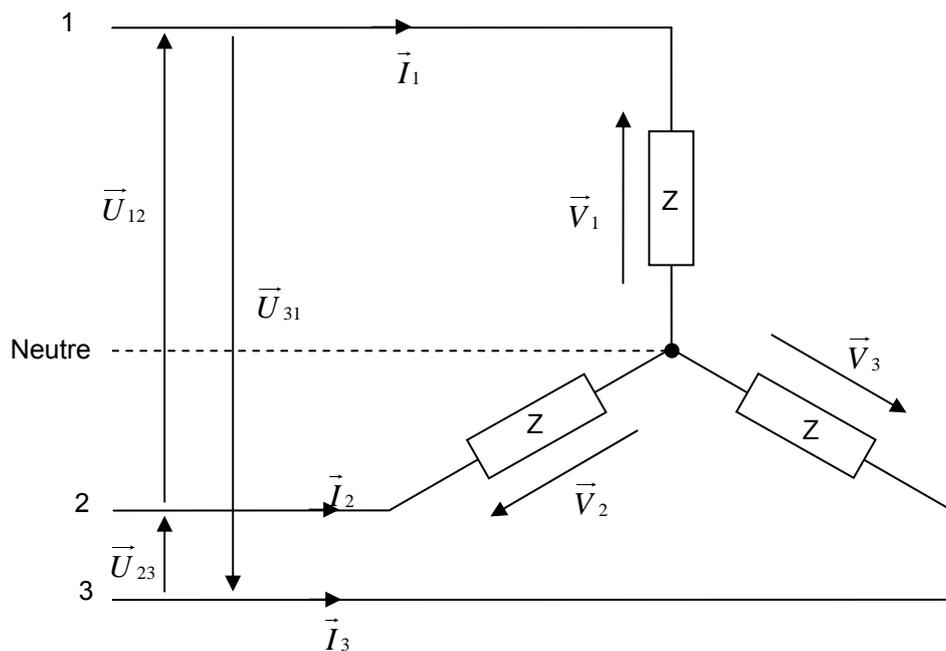


Figure 65

Dans le cas du montage étoile, les courants des lignes d'alimentation sont identiques à ceux qui traversent les trois dipôles composant le récepteur.

Les d.d.p. aux bornes des 3 dipôles du récepteur sont des tensions simples.

Si le récepteur est équilibré (Figure 65), alors :

$$|\vec{I}_1| = |\vec{I}_2| = |\vec{I}_3| = I$$

Montage en triangle (D)

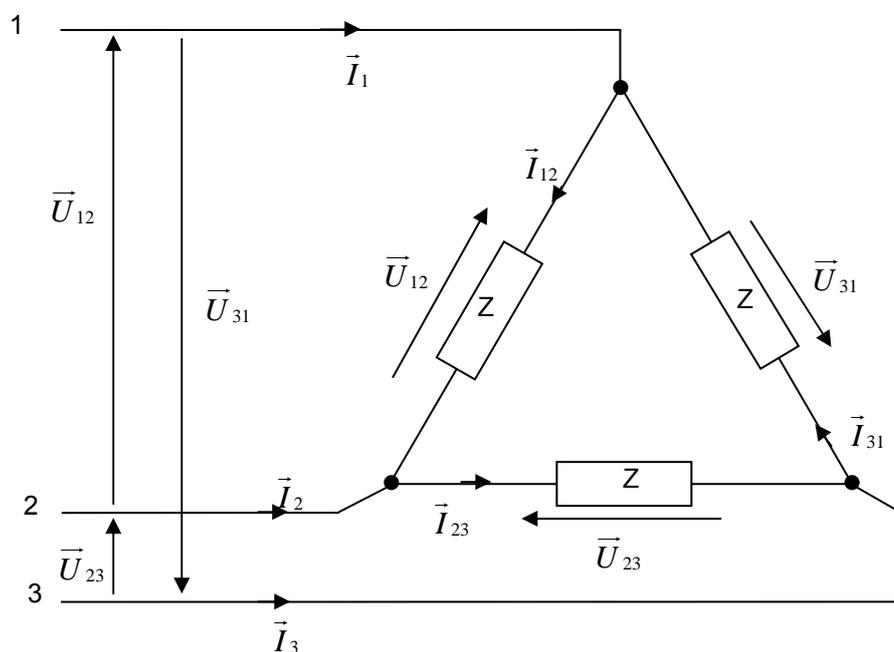


Figure 66

Les tensions aux bornes des 3 dipôles constituant le récepteur sont les tensions composées U .

Par ailleurs, les équations de nœuds aux trois sommets du triangle permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \vec{I}_{12} - \vec{I}_{31} \\ \vec{I}_2 = \vec{I}_{23} - \vec{I}_{12} \\ \vec{I}_3 = \vec{I}_{31} - \vec{I}_{23} \end{cases}$$

Pour une séquence 123, le diagramme vectoriel des intensités est alors le suivant :

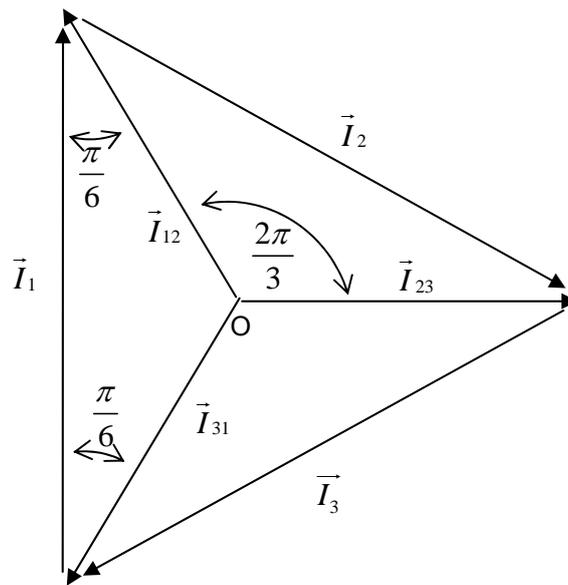


Figure 67

On constate que les trois intensités de ligne ($\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3$) sont déphasées de $\frac{2\pi}{3}$, deux à deux. Elles ont également même module.

Par ailleurs, les intensités dans les dipôles du récepteur ont le même module :

$$|\vec{I}_{12}| = |\vec{I}_{23}| = |\vec{I}_{31}| = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

Puissance dissipée dans un montage triphasé

La puissance dissipée dans un montage triphasé est égale à la somme des puissances dissipées au niveau de chaque impédance de la charge.

Pour un récepteur équilibré constitué de trois impédances identiques Z , cette puissance est égale à trois fois la tension aux bornes d'un dipôle multipliée par l'intensité qui traverse un dipôle multipliée par le cosinus du déphasage introduit par le dipôle entre la tension aux bornes du dipôle et l'intensité qui le traverse.

Pour un montage en étoile, la tension aux bornes d'un dipôle est $V = \frac{U}{\sqrt{3}}$ tandis que le courant dans chaque dipôle est égal au courant de ligne I . On a donc :

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Pour un montage en triangle, la tension aux bornes d'un dipôle est U tandis que le courant traversant chaque dipôle est $\frac{I}{\sqrt{3}}$. On trouve également $P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$

Montage en triangle :

Pour chaque dipôle Z_{Δ} de la Figure 68, la tension aux bornes correspond à la tension composée et le courant à l'intensité absorbée sur les lignes d'alimentation divisée par $\sqrt{3}$. L'intensité traversant chaque dipôle est déphasée d'un angle θ par rapport à la tension aux bornes (angle introduit par chaque impédance Z_{Δ}).

Ainsi, pour chaque dipôle, la puissance est $P = U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta$.

La puissance totale pour le récepteur est $P_T = 3 \cdot U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \theta$

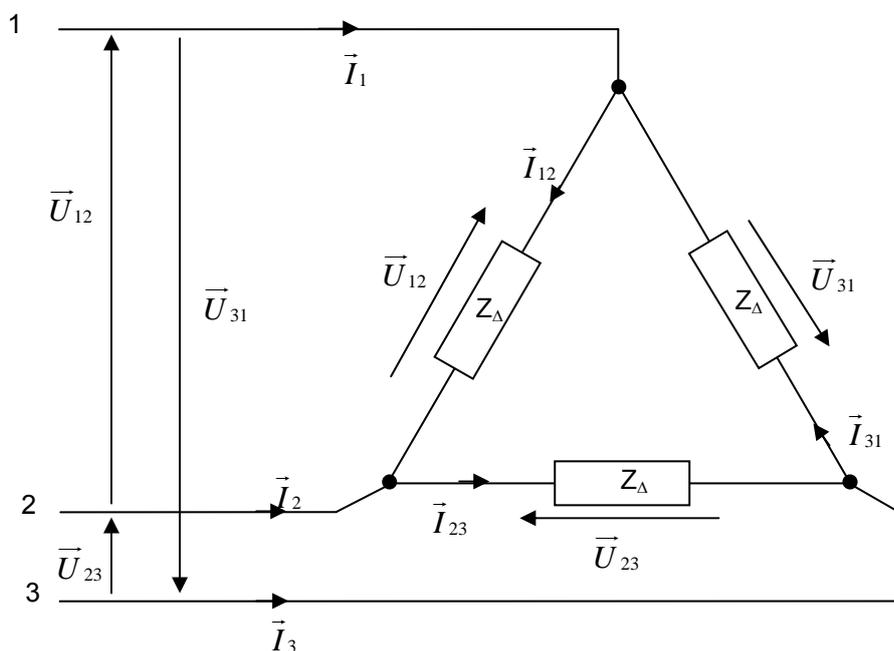


Figure 68

Montage en étoile

Pour chaque dipôle Z_Y de la Figure 69, la tension aux bornes correspond à la tension simple $\frac{U}{\sqrt{3}}$ et le courant est l'intensité absorbée sur les lignes. L'intensité traversant chaque dipôle est déphasée d'un angle θ par rapport à la tension aux bornes (angle introduit par chaque impédance Z_Y).

Ainsi, pour chaque dipôle, la puissance est $P = V \cdot I \cdot \cos \theta = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos \theta$.

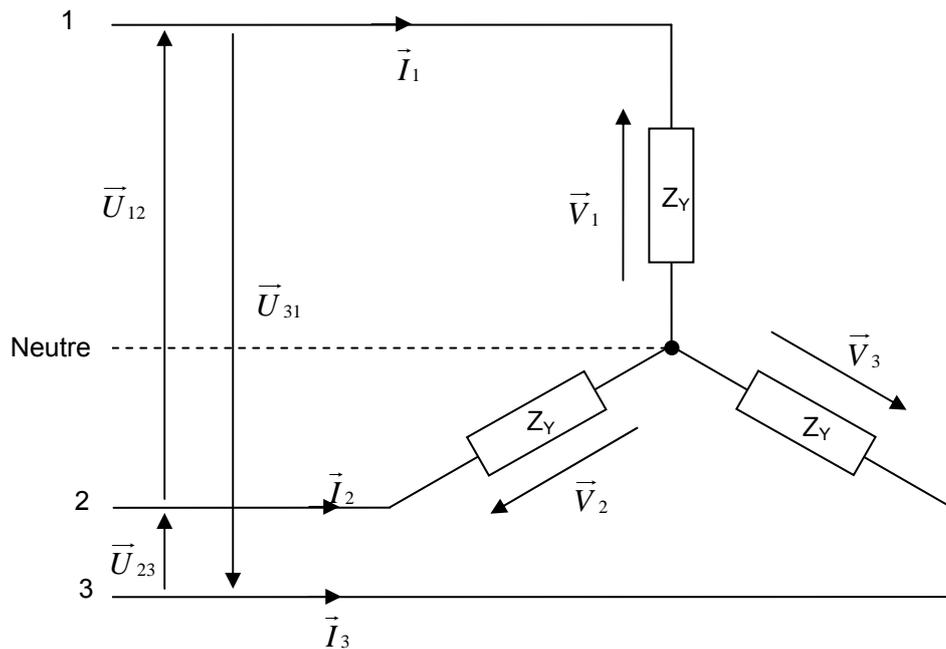


Figure 69

Donc, pour le récepteur triphasé : $P_T = 3 \cdot \left(\frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos \theta \right) = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \theta$.

On retrouve la même formule que pour un récepteur en triangle.

Conclusion :

Pour un système triphasé équilibré quelconque, la puissance totale est donnée par :

$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \theta$ où θ est l'angle de déphasage introduit par une des 3 l'impédances du récepteur entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse.

Par extension de cette formule, on déduit les formules donnant la puissance réactive d'un système triphasé équilibré ainsi que celle donnant la puissance apparente :

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \theta$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$$

Comparaison du cuivre nécessaire pour transporter une puissance P en monophasé et en triphasé :

Transport en monophasé

Calculons le volume de métal (cuivre ou aluminium) nécessaire pour transporter dans une ligne monophasée une puissance P à la distance D sans que la perte de puissance dépasse a % (pour information, EDF consent à 6 % de perte). Si r désigne la résistance d'un fil de ligne, on peut calculer les pertes en ligne en fonction de la tension U à l'arrivée et du facteur de puissance du récepteur, soit :

$$p = 2rI^2 \text{ avec } I = \frac{P}{U \cos \varphi} \text{ et } r = \rho \frac{D}{S} \text{ avec } S \text{ section des câbles.}$$

Etant donné que ces pertes ne doivent pas dépasser a % de P, on a :

$$p = a \cdot P = 2 \cdot \rho \frac{D}{S} \cdot \frac{P^2}{U^2 \cdot (\cos \varphi)^2} \Rightarrow S = 2 \cdot \rho \frac{D}{a \cdot P} \cdot \frac{P^2}{U^2 \cdot (\cos \varphi)^2} = 2 \cdot \rho \cdot \frac{DP}{a \cdot U^2 \cdot (\cos \varphi)^2}$$

La longueur total du câble étant 2D, le volume du cuivre sera :

$$V_{mono} = 2 \cdot D \cdot S = 4 \cdot \rho \cdot \frac{D^2 P}{a \cdot U^2 \cdot (\cos \varphi)^2}$$

Pour une puissance P et une distance D donnée, le volume de métal est inversement proportionnel au carré de la tension.

On souhaite utiliser le moins de métal possible pour des raisons économiques car non seulement cela influence le prix du câble proprement dit, mais aussi celui des pylônes qui devront être d'autant plus résistants que la masse linéique du câble sera importante. On aura donc intérêt à adopter des tensions élevées pour le transport de l'énergie.

Par ailleurs, on peut noter que le volume de métal est inversement proportionnel au carré du facteur de puissance. On a donc intérêt à transporter l'énergie avec un facteur de puissance voisin de l'unité. C'est ainsi qu'EDF incite les industriels à relever le facteur de puissance de leurs installations en facturant l'énergie réactive.

Transport en triphasé

$$\text{On a } p = 3rI^2 \text{ avec } I = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos \varphi} \text{ et } r = \rho \frac{D}{S} \text{ avec } S \text{ section des câbles.}$$

$$\text{D'où } p = a \cdot P = 3 \cdot r \cdot I^2 = \rho \frac{D}{S} \cdot \frac{P^2}{U^2 \cdot (\cos \varphi)^2} \Rightarrow S = \rho \frac{D}{a \cdot P} \cdot \frac{P^2}{U^2 \cdot (\cos \varphi)^2} = \rho \cdot \frac{DP}{a \cdot U^2 \cdot (\cos \varphi)^2}$$

$$\text{Soit : } V_{tri} = 3 \cdot D \cdot S = 3 \cdot \rho \cdot \frac{D^2 P}{a \cdot U^2 \cdot (\cos \varphi)^2}$$

Le volume de métal d'une ligne triphasée (et par suite la masse de métal) n'est que les trois quart de celui de la ligne monophasée transportant la même puissance.

Mesure de puissance en triphasé

La puissance active se mesure à l'aide d'un wattmètre. Le wattmètre est un instrument constitué d'une bobine de tension et d'une bobine de courant disposée de telle sorte que l'indication (déviations d'une aiguille ou nombre apparaissant sur un afficheur) soit proportionnelle à $V \cdot I \cdot \cos \theta$, où θ est le déphasage entre la tension et le courant.

Un système triphasé à quatre conducteurs alimentant une charge en triangle non équilibrée exigerait trois wattmètres (un par phase) pour mesurer la puissance, voir Figure 70.

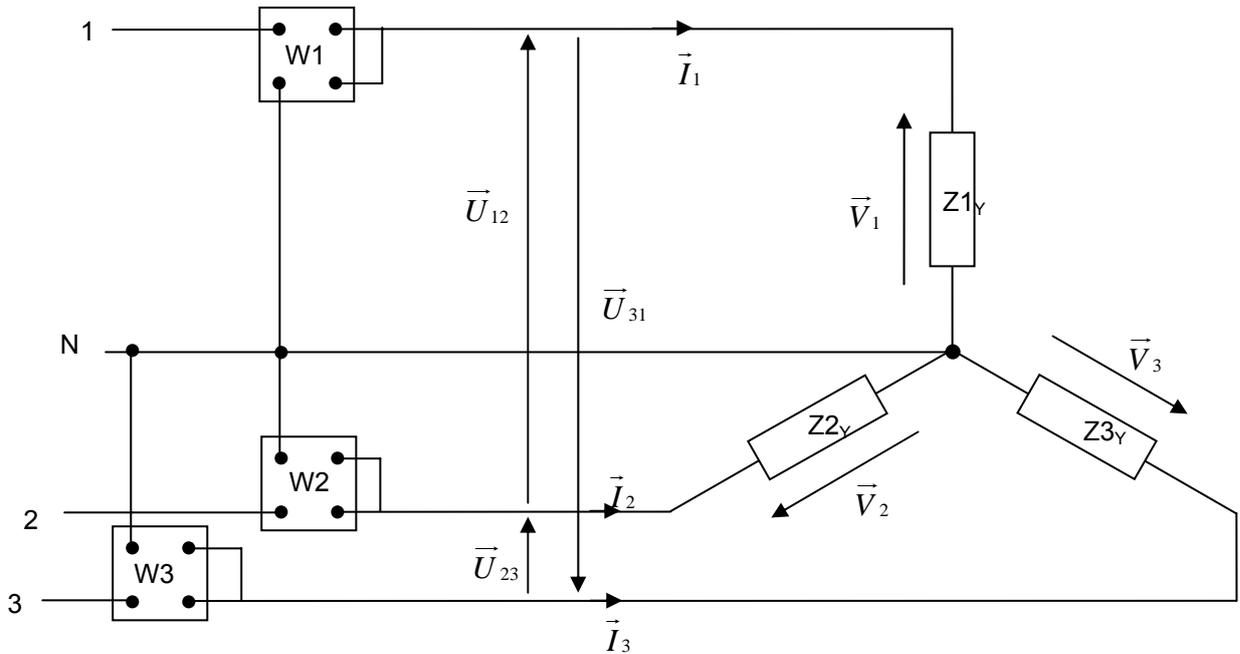


Figure 70

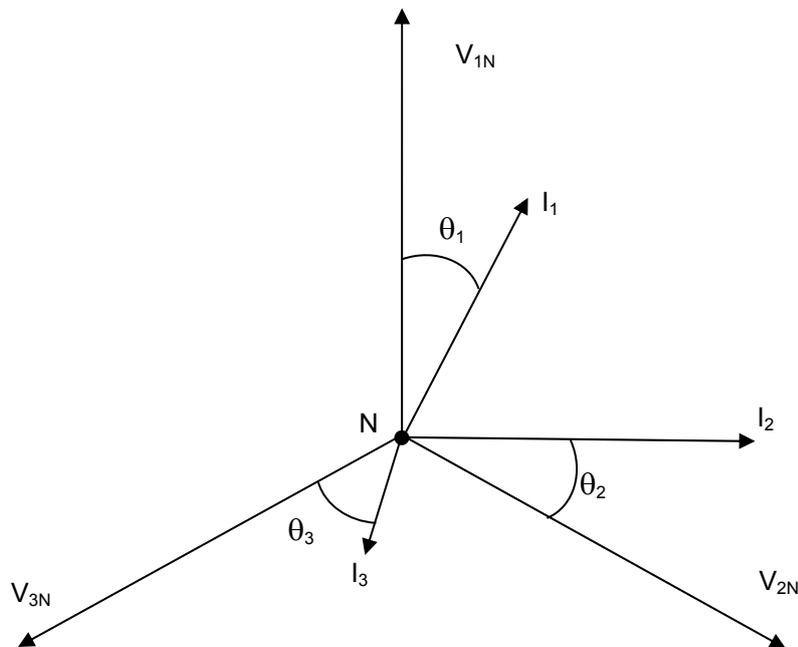


Figure 71

Le diagramme vectoriel de la Figure 71 suppose un courant déphasé en arrière pour la phase 1 et des courants déphasés en avant pour les phases 2 et 3. Les angles de déphasage étant respectivement θ_1 , θ_2 et θ_3 . Les indications des wattmètres sont alors les suivantes :

$$W_1 = V_{1N} \cdot I_1 \cdot \cos \angle_{1N}^{1N}, \quad W_2 = V_{2N} \cdot I_2 \cdot \cos \angle_{2N}^{2N}, \quad W_3 = V_{3N} \cdot I_3 \cdot \cos \angle_{3N}^{3N}$$

Où \angle_{1N}^{1N} représente le déphasage entre V_{1N} et I_1 . Le wattmètre W_1 indique la puissance dans la phase 1 et les wattmètres W_2 et W_3 celles dans les phases 2 et 3 respectivement. La puissance totale est :

$$P_T = W_1 + W_2 + W_3$$

En général, on ne possède pas 3 wattmètres et il faut donc effectuer successivement les 3 mesures avec le wattmètre dont on dispose.

Si le récepteur est un récepteur triphasé équilibré (Figure 72), le montage en vue de la mesure de la puissance active se simplifie considérablement. Etant donné que les 3 impédances sont identiques, les courants absorbés par chaque phase sont eux aussi identiques et un seul wattmètre (ou une seule mesure) suffit :

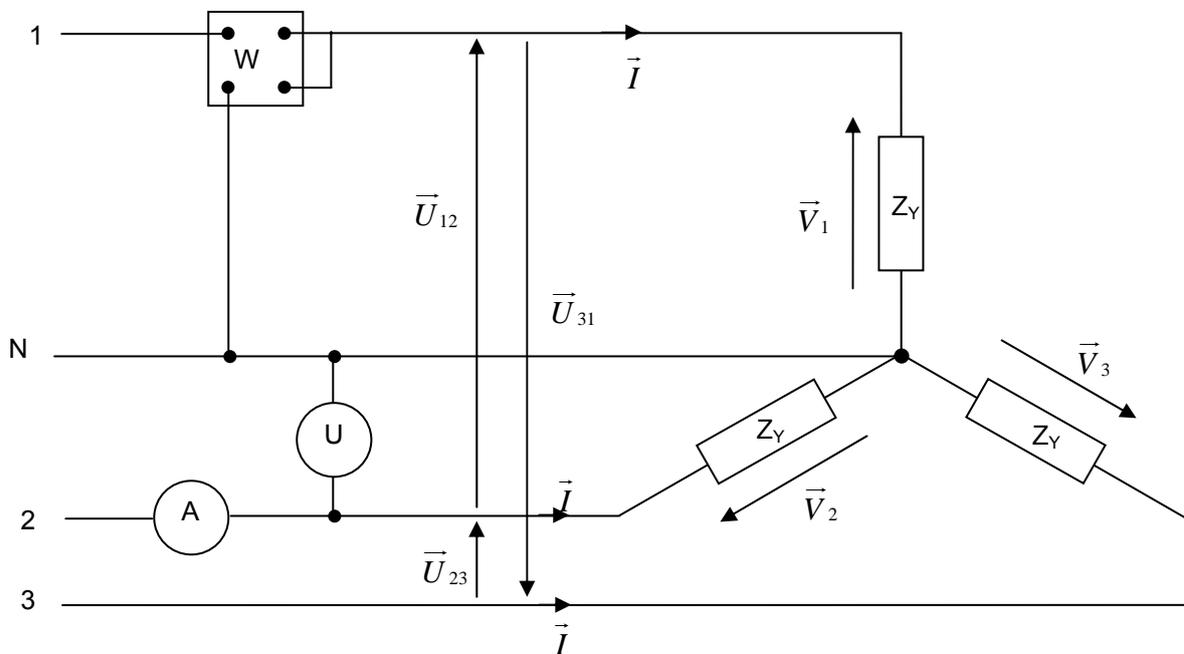


Figure 72

Mesurer l'intensité I et la tension entre phases U permet d'accéder au déphasage θ :

$$\theta = \arccos\left(\frac{P}{\sqrt{3} \cdot U \cdot I}\right)$$

Si le neutre n'est pas disponible, on peut créer un neutre artificiel en connectant 3 inductances identiques de fortes impédances (au moins 100 kΩ) de la manière suivante :

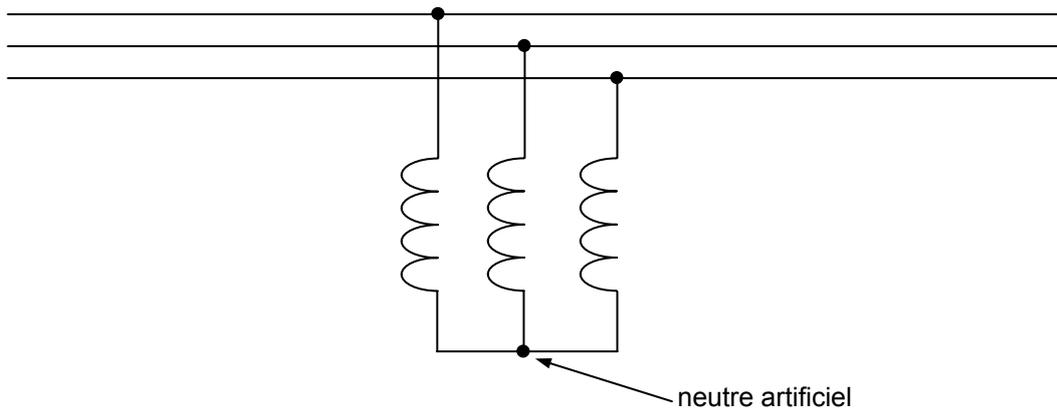


Figure 73 Création d'un neutre artificiel

Méthode des deux wattmètres

Charges quelconques

La puissance totale d'un système triphasé à trois conducteurs est donnée par la somme des indications de deux wattmètres disposés dans n'importe lesquelles des phases avec les bobines de tension connectées au troisième conducteur comme le montre la Figure 74.

Les indications des wattmètres sont :

$$W_1 = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos \angle_1^{12} \text{ et } W_3 = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos \angle_3^{32} \quad (1.1)$$

En appliquant la loi des nœuds aux nœuds 1 et 3 de la charge connectée en triangle, on peut écrire :

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_{12} - \vec{I}_{31} = \vec{I}_{12} + \vec{I}_{13} \text{ et } \vec{I}_3 = \vec{I}_{31} - \vec{I}_{23} = \vec{I}_{31} + \vec{I}_{32} \quad (1.2)$$

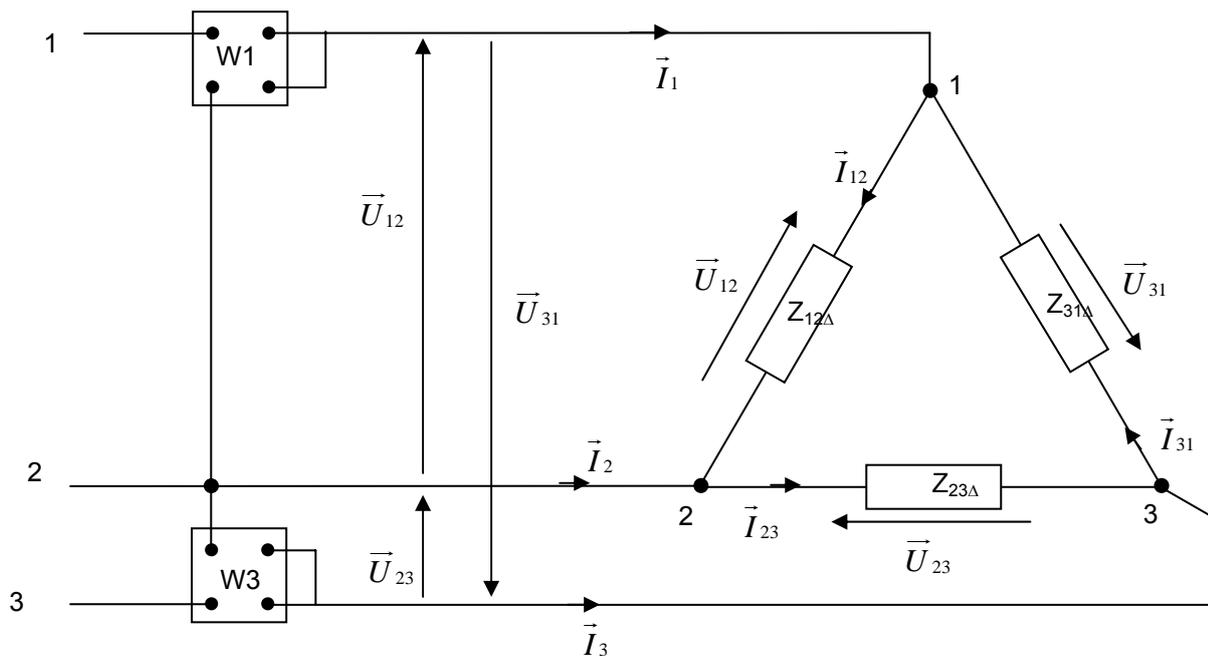


Figure 74

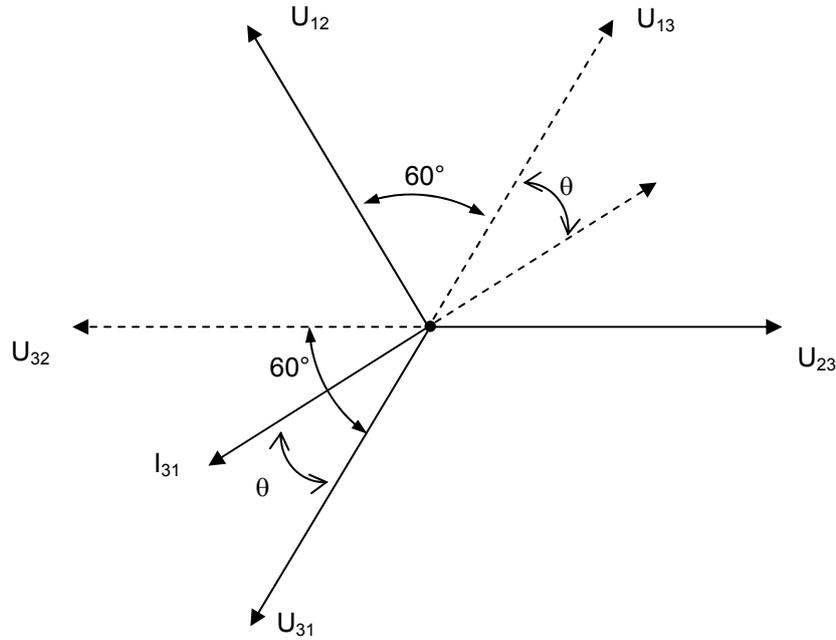


Figure 75

En substituant les expressions de I_1 et I_2 données par la relation (1.2) dans les équations du wattmètre (1.1), on obtient :

$$W_1 = U_{12} \cdot I_{12} \cdot \cos \angle_{12}^{12} + U_{12} \cdot I_{13} \cdot \cos \angle_{13}^{12}$$

$$W_3 = U_{32} \cdot I_{31} \cdot \cos \angle_{31}^{32} + U_{32} \cdot I_{32} \cdot \cos \angle_{32}^{32}$$

Les termes $U_{12} \cdot I_{12} \cdot \cos \angle_{12}^{12}$ et $U_{32} \cdot I_{32} \cdot \cos \angle_{32}^{32}$ sont immédiatement identifiés comme étant les puissances respectives des dipôles 1-2 et 3-2 du récepteur. Les deux termes restant contiennent $U_{12} \cdot I_{13}$ et $U_{32} \cdot I_{31}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $U \cdot I_{13}$ du fait que U_{12} et U_{32} correspondent aux tensions entre phases (alimentation triphasée équilibrée $\Rightarrow U_{12} = U_{23} = U_{31} = U$) et que $I_{13} = I_{31}$. Afin de déterminer ces deux termes, il suffit de construire le diagramme vectoriel de la

Figure 75, ci-dessus, où l'on suppose que le courant I_{13} est en retard sur la tension U_{13} d'un angle θ .

De ce diagramme, on déduit : $\angle_{13}^{12} = 60^\circ + \theta$ et $\cos \angle_{31}^{32} = \cos(60^\circ - \theta)$.

$$W_1 + W_2 = \text{puissance dipôle 1-2} + \text{puissance dipôle 3-2} + U_{12} \cdot I_{13} \cdot \cos \angle_{13}^{12} + U_{32} \cdot I_{31} \cdot \cos \angle_{31}^{32}$$

$$U_{12} \cdot I_{13} \cdot \cos \angle_{13}^{12} + U_{32} \cdot I_{31} \cdot \cos \angle_{31}^{32} = U \cdot I_{13} \cdot \cos(60^\circ + \theta) + U \cdot I_{13} \cdot \cos(60^\circ - \theta)$$

Or : $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ et $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

D'où :

$$U \cdot I_{13} \cdot (\cos(60^\circ + \theta) + \cos(60^\circ - \theta)) = U \cdot I_{13} \cdot (\cos 60^\circ \cos \theta - \sin 60^\circ \sin \theta + \cos 60^\circ \cos \theta + \sin 60^\circ \sin \theta)$$

$$U \cdot I_{13} \cdot (\cos(60^\circ + \theta) + \cos(60^\circ - \theta)) = U \cdot I_{13} \cdot \cos \theta$$

Ainsi, $U_{12} \cdot I_{13} \cdot \cos \angle_{13}^{12} + U_{32} \cdot I_{31} \cdot \cos \angle_{31}^{32}$ correspond à la puissance dans le dipôle 1-3.

Ainsi, la somme des indications données par les 2 wattmètres correspond à la puissance totale de la charge triphasée. Deux wattmètres suffisent à mesurer la puissance d'une charge triphasée, que celle-ci soit en triangle ou en étoile. En effet, le théorème de Kennelly indique que l'on peut remplacer la charge en triangle précédente par une charge en étoile équivalente.

Méthode des deux wattmètres appliquée à des charges équilibrées

Considérons le circuit en étoile constitué par les 3 impédances identiques de la Figure 76.

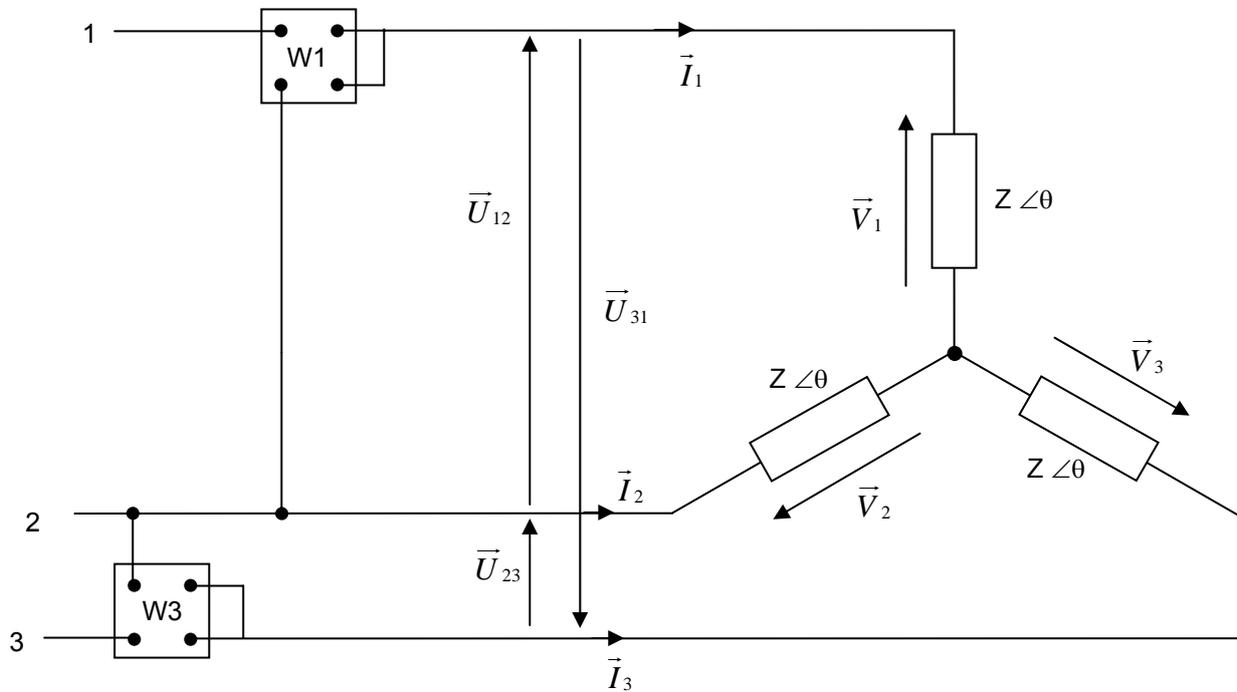


Figure 76

Le diagramme vectoriel correspondant est tracé sur la Figure 77 pour une séquence 123 en supposant que le courant est en retard sur la tension d'un angle θ .

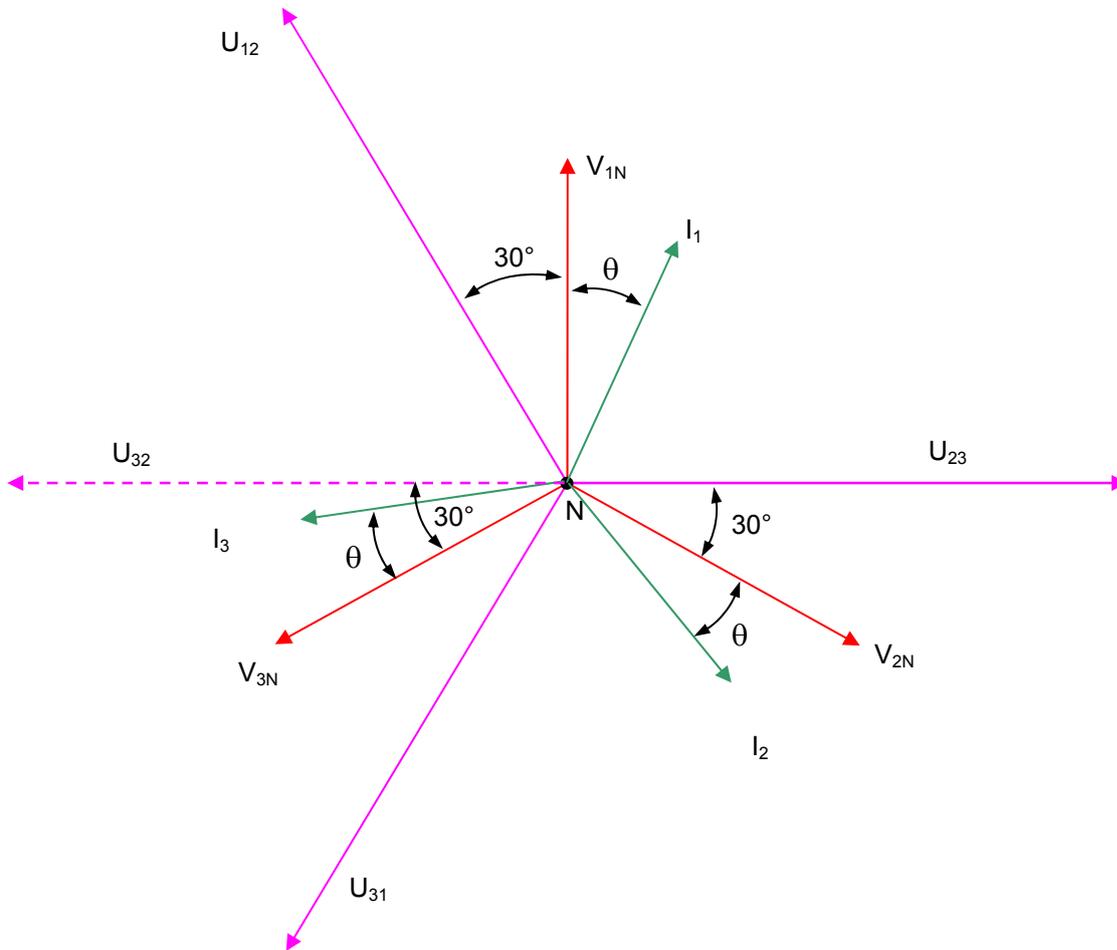


Figure 77

Des précédentes figures, il résulte que les indications des wattmètres mesurant les courant des phases 1 et 3 sont :

$$W_1 = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos \angle_1^{12} \text{ et } W_2 = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos \angle_3^{32} \quad (1.3)$$

$$\text{Où (cf Figure 77) } \cos \angle_1^{12} = 30^\circ + \theta \text{ et } \cos \angle_3^{32} = 30^\circ - \theta \quad (1.4)$$

En substituant (1.4) dans (1.3), il vient :

$$W_1 = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos(30^\circ + \theta) \text{ et } W_2 = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos(30^\circ - \theta)$$

Avec une charge équilibrée, les indications des wattmètres sont $W_1 = U \cdot I \cdot \cos(30^\circ + \theta)$ et

$W_2 = U \cdot I \cdot \cos(30^\circ - \theta)$ où θ est le déphasage dû à l'impédance. Les deux indications peuvent être utilisées pour déterminer ce déphasage.

En développant les expressions de W_1 et W_2 , on obtient :

$$W_1 = U \cdot I \cdot (\cos 30^\circ \cos \theta - \sin 30^\circ \sin \theta) \quad (1.5)$$

$$W_2 = U \cdot I \cdot (\cos 30^\circ \cos \theta + \sin 30^\circ \sin \theta) \quad (1.6)$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 + W_2 = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \theta = P \\ W_2 - W_1 = U \cdot I \cdot \sin \theta = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = W_1 + W_2 \\ Q = \sqrt{3}(W_2 - W_1) \end{array} \right.$$

On en tire également :

$$\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} \right)$$

La tangente de l'angle de déphasage dû à l'impédance de charge \underline{Z} est égale à $\sqrt{3}$ fois le rapport de la différence entre les indications des deux wattmètres à leur somme. Si l'on ne connaît pas ni les phases où sont placées les wattmètres, ni la séquence du système, il n'est pas possible de déterminer le signe du déphasage. Cependant, si aussi bien la séquence que l'emplacement des wattmètres sont connus, alors le signe du déphasage peut être déterminé par les expressions suivantes :

- Pour une séquence 123 : $\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_3}{W_2 + W_3} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{W_3 - W_1}{W_3 + W_1} \right)$
- Pour une séquence 321 : $\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{W_3 - W_2}{W_3 + W_2} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{W_1 - W_3}{W_1 + W_3} \right)$

Annexe facultative : les perturbations harmoniques

Il m'apparaît intéressant de présenter ici la question des harmoniques bien que celle-ci soit en dehors du programme de 1^{re} année. En effet, cela justifie la distinction à faire entre facteur de puissance (FP) et $\cos \varphi$, cela permet d'introduire certains points de vocabulaire qu'il est bon de connaître dès le début de l'étude des tensions alternatives industrielles.

I Introduction

1. Rappels :

La forme de l'onde, de courant ou de tension, relevée dans les réseaux industriels s'éloigne de plus en plus souvent de la forme sinusoïdale pour prendre des allures très diverses. La non linéarité des récepteurs va générer un courant dit "déformé".

Le signal déformé peut se décomposer en une somme d'ondes sinusoïdales et d'une composante éventuellement continue (théorème de Fourier).

On distingue le fondamental (composante sinusoïdale de fréquence égale à celle du signal) des harmoniques (composantes de fréquence multiple de celle du signal).

On définit le rang harmonique comme le rapport entre la fréquence de cet harmonique et la fréquence du fondamental.

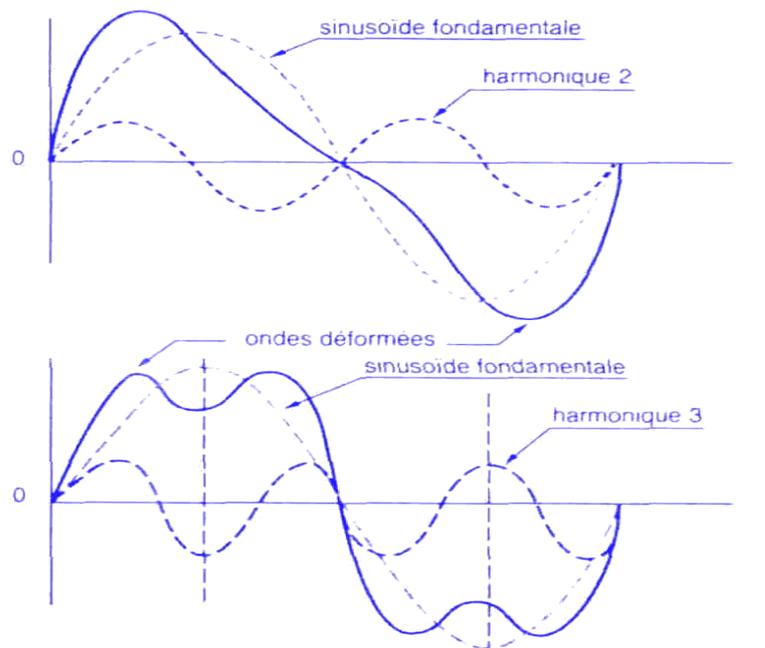
Soit un signal y écrit sous la forme $y = A_0 + \sum_n A_n \cdot \cos(n\omega t - n\varphi)$

A_0 est la composante continue ; A_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n ; n est un entier compris entre 1 et l'infini, il définit le rang de l'harmonique. Si $n = 1$, l'harmonique est appelé fondamental.

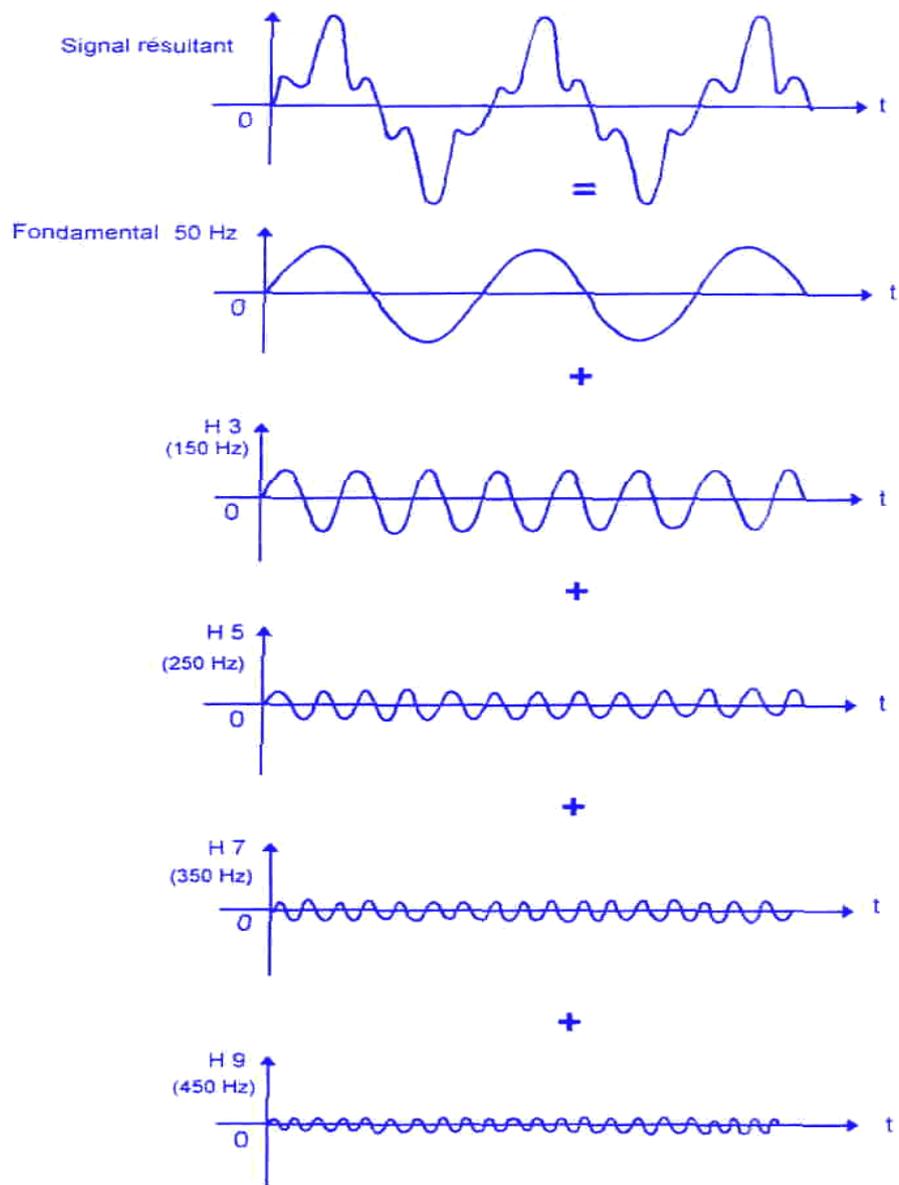
$n\varphi$ est le déphasage relatif au fondamental de la composante harmonique de rang n .

En règle générale on distingue les harmoniques de rangs pairs (2, 4, 6, 8,...etc.) et les harmoniques de rangs impairs (3, 5, 7, 9 ...etc.) plus influents, dans les réseaux industriels.

2. Exemples de signaux déformés



Décomposition d'un signal déformé



II) Quelques définitions

Un signal est défini par :

- la valeur efficace (RMS ou eff) $I_{RMS} = I_{eff} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} i_n^2(t)}$
- la valeur crête (PEAK),
- le facteur de crête (FC) $FC = \frac{I_{crête}}{I_{eff}}$

Rq : Si le facteur crête est différent de $\sqrt{2}$, le signal est "déformé".

Le facteur de distorsion total (DF) $DF = \frac{\sqrt{I_0^2 + \sum_{n=2}^{\infty} i_n^2(t)}}{I_{eff}}$

Le taux de distorsion harmonique par rapport à la fréquence fondamentale (THD ou TDH) :

$$THD\% = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} i_n^2(t)}}{I_{\text{fondamental}}}$$

On définit aussi le taux individuel d'harmonique en % (τ_n) = $100 \times \frac{A_n}{A_1}$

Nous retrouverons les mêmes définitions pour la tension.

Exemple de calcul sur un courant déformé :

Soit un signal déformé composé des harmoniques suivants :

On a relevé dans un tableau les intensités et le taux individuel harmonique pour chaque rang.

Rang harmonique	Intensité efficace (RMS)	$\tau_n\% = 100 \times \frac{A_n}{A_1}$
1 (fondamental)	Ih1 = 104 A = A1	100
3	Ih3 = 84A = A3	81
5	Ih5 = 64A = A5	61
7	Ih7 = 40A = A7	38
9	Ih9 = 16A = A9	15
I crête=392A		

On recherche :

$$I_{RMS} = I_{eff} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} i_n^2(t)} = \sqrt{I_{h1}^2 + I_{h3}^2 + I_{h5}^2 + I_{h7}^2 + I_{h9}^2} = \sqrt{104^2 + 84^2 + 64^2 + 40^2 + 16^2} = 154,35 \text{ A}$$

$$DF = \frac{\sqrt{I_{h3}^2 + I_{h5}^2 + I_{h7}^2 + I_{h9}^2}}{I_{eff}} = \frac{118}{157} = 75,2\%$$

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} i_n^2(t)}}{I_{\text{fondamental}}} = \frac{118}{104} = 113,5\%$$

$$FC = \frac{I_{\text{crête}}}{I_{eff}} = \frac{392}{157} = 2,5$$

Ces valeurs mesurées ou calculées permettent de contrôler si elles sont conformes aux normes en vigueur.

III) Puissances en présence d'harmoniques :

En présence d'harmoniques, S^2 n'est pas la résultante de P^2+Q^2 .

On introduit la notion de puissance de distorsion ou puissance déformante D telle que : $S^2 = P^2+Q^2+ D^2$

$$D = V \cdot \sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_p^2 + \dots}$$

S est la puissance apparente, P la puissance active, Q la puissance réactive et D la puissance déformante ou de distorsion.

P et Q ne dépendent que du fondamental du courant, de la tension (supposée sinusoïdale) et de l'angle φ .

L'angle φ est le déphasage entre le fondamental du courant et la tension. D dépend uniquement des courants harmoniques.

Facteur de puissance FP et de déphasage $\cos\varphi$.

Le facteur de puissance noté FP est le rapport de la puissance active P à la puissance apparente S . Il tient compte des harmoniques.

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}$$

Le facteur de puissance (FP) ne doit pas être confondu avec le cosinus φ ($\cos\varphi$) appelé aussi facteur de déplacement de la puissance (DPF).

Le $\cos\varphi$ ne dépend que des composantes fondamentales de la tension et de l'intensité : $\cos\varphi = \cos\varphi_1 = \cos(\widehat{\overline{V}_1, \overline{I}_1})$.

Pour améliorer le facteur de puissance, il existe deux possibilités :

- agir sur Q en utilisant des condensateurs de compensation ;
- agir sur D en éliminant les harmoniques au moyen de filtres passifs ou actifs.

IV) Les effets des Harmoniques

Effets instantanés :

- Perturbations dans le fonctionnement des appareils de protection et de commutation.
- Effets à moyen et long terme.
- Echauffement des matériels électriques, vieillissement prématuré de ceux-ci.

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des matériels électriques perturbés par la pollution harmonique.

Nature du matériel électrique	Effet de la «pollution harmonique »
Machines tournantes Moteurs triphasés, alternateurs	Echauffements supplémentaires (effet Joule) dans les enroulements statoriques. Couples oscillatoires. Augmentation du bruit.
Transformateurs	Pertes supplémentaires dans le fer (par courants de Foucault) et dans les enroulements (par effet Joule). Risque de saturation en présence d'harmoniques pairs.
Câbles	Augmentation des pertes surtout dans le câble de neutre où s'ajoutent les harmoniques de rang 3 et multiples de 3. Pertes diélectriques supplémentaires.
Electronique de puissance (ponts redresseurs à thyristor, transistors,..etc).	Troubles fonctionnels liés la forme d'onde (commutation, synchronisation).
Condensateurs de puissance	Pertes diélectriques supplémentaires aboutissants à un vieillissement prématuré des condensateurs.
Ordinateur	Dysfonctionnement lié aux couples pulsatoires des moteurs d'entraînement des supports magnétiques.
Dispositifs de protection (Fusibles. Disjoncteurs magnétothermiques...)	Fonctionnement intempestif
Compteur d'énergie	Erreurs de mesure.
Téléviseurs	Déformation d'IMAGE.
Lampes à décharge	Risque de vacillement sous l'effet de l'harmonique de rang 2.

V) Conséquences des perturbations harmoniques de courant sur le réseau

Pour chaque harmonique de courant traversant l'impédance du réseau, il apparaît une tension harmonique V_h .

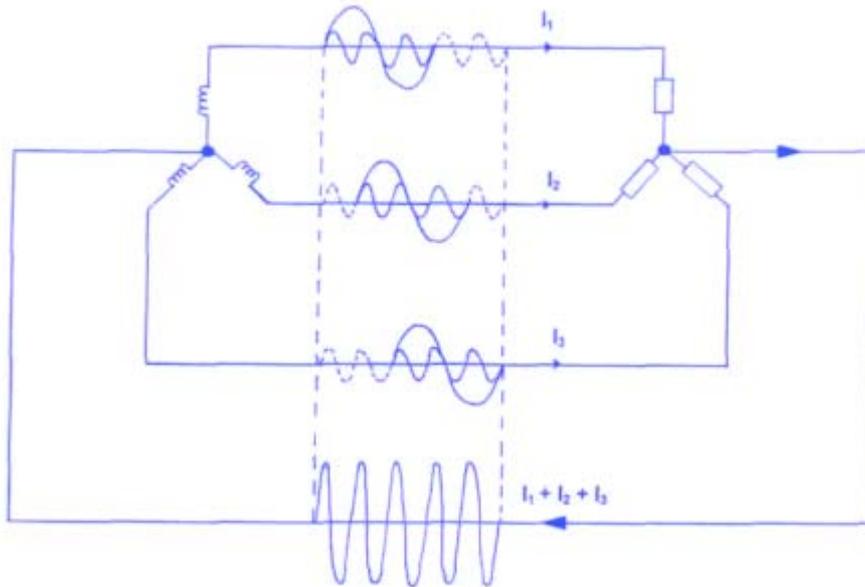
$$V_h = Z_h \times I_h \text{ avec } Z_h \text{ impédance harmonique du réseau.}$$

La circulation des courants harmoniques dans le réseau entraîne donc une déformation de l'onde de tension. Cela peut être préjudiciable au bon fonctionnement des récepteurs sensibles branchés sur ce même réseau.

Conséquences pour le conducteur de neutre :

L'un des effets les plus connus est celui de la circulation des courants harmoniques de rang 3 et multiples de 3 dans le conducteur de neutre. Il peut être bien supérieur au courant circulant dans les phases.

Exemple de courant observé dans un récepteur.



Comme le montre la figure ci-dessus, les courants harmoniques de rang 3, dans chacune des trois phases, s'ajoutent dans le conducteur de neutre. Celui-ci est ainsi parcouru par un courant de fréquence 150 Hz, dont l'intensité est égale à trois fois celle de chaque conducteur de phase, en supposant la charge équilibrée. Dans l'exemple ci-dessous, on montre l'influence des harmoniques sur le choix de la section des conducteurs :

Courant fondamental $I_{h1} = 207A$	Taux de distorsion harmonique 83,7 %
Courant harmonique 3 $I_{h3} = 173 A$	Taux de distorsion harmonique 71,7 %
Courant harmonique 5 $I_{h5} = 148 A$	Taux de distorsion harmonique 54,3 %
Courant harmonique 7 $I_{h7} = 112 A$	

D'après le tableau précédent, on calcule :

a) Le courant efficace dans chaque conducteur de phase.

$$I_{eff} = \sqrt{I_{h2}^2 + I_{h3}^2 + I_{h5}^2 + I_{h7}^2} = 327 A$$

On constate que le courant de phase est 1,58 fois le courant fondamental ($I_{h1}=207A$)

b) Le courant dans le neutre.

Si les phases sont équilibrées, le courant dans le neutre devrait être nul, mais en présence d'harmoniques de rang 3 ou multiple de 3 (principalement les rangs 3, 6, 9, 15), ceci n'est plus vrai.

Dans notre cas :

$I_{\text{neutre}} = 3I_{h3} = 3 \times 173 = 519 \text{ A}$, le courant dans le neutre est 2,5 fois le courant fondamental.

Sans présence d'harmoniques, on choisit, selon certains critères (mode de pose, température,..etc), une section correspondant au courant fondamental. Admettons 70 mm² pour les phases.

On constate qu'en présence de courants harmoniques il sera nécessaire d'augmenter les sections des conducteurs de phase et de neutre car les courants sont supérieurs au fondamental.

On serait obligé de prévoir une section supérieure à 70 mm², c'est à dire au moins 120 mm² pour les conducteurs de phase et 210 mm² pour le conducteur de neutre.

Conclusion :

Lorsqu'un circuit alimente des appareils susceptibles de générer des courants harmoniques, la section des conducteurs déterminée d'après le courant nominal doit être majorée.

La NFC 15100 permet lorsque le conducteur de neutre est peu chargé de choisir une section moitié de celle des conducteurs de phase. Elle ne peut être appliquée que si les matériels électriques ne produisent aucun harmonique ou des harmoniques de valeur réduite.

VI) Quelques remèdes contre la pollution harmonique

- Rechercher une puissance de court circuit le plus élevée possible (impédance de source faible).
- Connecter les charges polluantes le plus en amont possible du réseau.
- Alimenter les charges polluantes par une source séparée.
- Placer des inductances en amont de ces charges.
- Utiliser des filtres passifs accordés sur la fréquence du ou des harmoniques à atténuer.
Ces filtres (R, L, C) sont de types :
 - Shunt résonnant.
 - Amortis.
- Utiliser un compensateur actif.
- Confiner les harmoniques (suppression en amont des transformateurs grâce à un couplage particulier).

Exercices de triphasé :

1. Un système triphasé à trois conducteurs, séquence 123 de $100 \times \sqrt{3}$ V alimente une charge équilibrée connectée en triangle dont les impédances sont égales à $20 \angle 45^\circ \Omega$. Déterminer les courants de ligne et tracer le diagramme vectoriel correspondant.

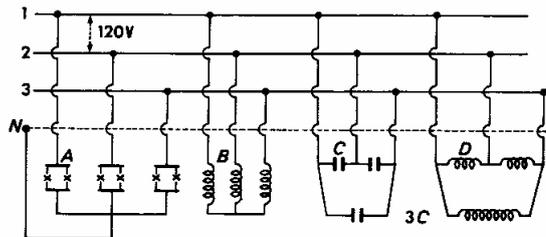
Déterminer les indications des wattmètres lorsqu'on applique la méthode des deux wattmètres à ce circuit.

2. Une installation, alimentée par un réseau triphasé quatre fils 50 Hz, 120 V entre fils principaux, comporte :

- 150 lampes de 100 W montées entre phases et neutre de façon à équilibrer les trois ponts;
- Un moteur produisant à 1450 tours par minute un couple utile de 98 N.m avec un rendement de 0,9 et un $\cos \varphi$ égal à 0,85;
- Une batterie de neuf condensateurs associés par trois en parallèle, puis montés en triangle. Capacité unitaire : $20 \mu\text{F}$.
- Trois bobines en triangle, ayant chacune pour résistance $R = 5 \Omega$ et pour inductance $L = 0,01\text{H}$.

1° On demande le courant appelé dans les ligne et le facteur de puissance de l'installation.

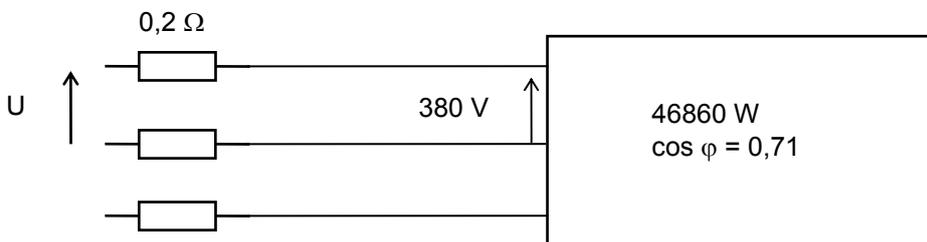
2° On souhaite remonter le $\cos \varphi$ à une valeur de 0,98 en branchant une batterie de condensateurs entre fils de phase. Si les condensateurs sont montés en triangle, quelle doit être leur valeur ? Même question dans le cas d'un montage étoile ? Quelle est la valeur de l'intensité absorbée sur les lignes désormais ?



3. Un récepteur triphasé équilibré absorbe une puissance active totale de 46860 watts avec un $\cos \varphi = 0,71$ (courant en retard sur la tension), ce récepteur doit être alimenté sous 380 V entre phases par une ligne dont chaque conducteur présente une résistance de $0,2 \Omega$.

Déterminer :

- le courant de ligne I
- la tension V nécessaire à l'entrée de la ligne pour que le récepteur soit normalement alimenté.



4. On mesure la puissance consommée par un récepteur triphasé équilibré par la méthode des deux wattmètres.

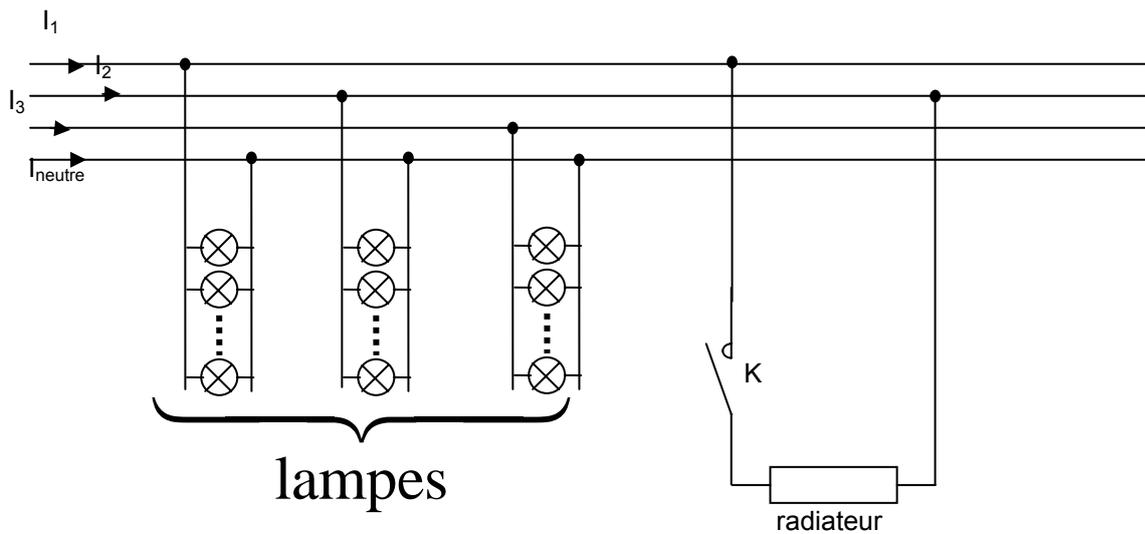
- Faire un schéma du dispositif.
- Le wattmètre n°1 indique $W_1 = 93 \text{ W}$ et le n°2 $W_2 = - 53 \text{ W}$. En déduire la puissance active consommée par le récepteur ainsi que la puissance réactive consommée. Calculer le déphasage entre la tension et le courant introduit par chacun des trois dipôles connectés en étoile composants le récepteur.

5. Sur une distribution triphasé 380 V – 50 Hz avec fil neutre, on branche en dérivation entre phase et neutre, trois groupes de 16 lampes à incandescence de 100 W chacune.

5.1. Déterminer le courant absorbé dans les lignes lorsque le contacteur K du radiateur est ouvert. Quelle est la valeur du courant dans le fil du neutre ?

5.2. On ferme le contacteur K permettant de connecter le radiateur. Ce dernier dégage une puissance de 3800 W. Calculer l'intensité qu'il absorbe. Calculer la nouvelle valeur des intensités I_1 , I_2 , I_3 , I_{neutre} .

5.3. Effectuer un graphique présentant les différentes tensions et les différentes intensités avec le système ABC. Vous prendrez une échelle telle que 1 cm représente 1 A et vous placerez le centre du cercle (point neutre) dans le bas d'une feuille format A4 à une dizaine de centimètres du bord inférieur.



6. Pour alimenter une installation électrique on dispose d'un réseau triphasé 220/380V, 50Hz. Le réseau est utilisé pour alimenter une installation électrique comprenant :

- 60 lampes de 500W chacune ($\cos\varphi=1$), réparties de façon à équilibrer les trois phases
- un groupe moteur aux bornes duquel la méthode des deux wattmètres a donné les indications suivantes : $P_1 = 60\text{kW}$ $P_2 = 200\text{kW}$
- un four thermique absorbant une puissance 1500W

6.1. Quelles sont les puissances active, réactive et apparente absorbées par le groupe moteur

6.2. Quels sont l'intensité du courant et le facteur de puissance à l'entrée de la dérivation du groupe moteur.

6.3. Quels sont l'intensité du courant et le facteur de puissance en tête de réseau.

On dispose de trois condensateurs ayant chacun une capacité de $C=150\ \mu\text{F}$. Afin de diminuer le courant sur le réseau et d'augmenter le facteur de puissance on les connecte en triangle.

6.4. Justifier le choix de la connexion.

6.5. Calculer la puissance réactive fournie par cette batterie de condensateurs.

6.6. En déduire les nouvelles valeurs de courant et de facteur de puissance en tête de réseau.

6.7. La mesure des puissances en tête de réseau étant faite par la méthode des deux wattmètres, quelles sont les indications des wattmètres dans ce cas.

7. Trois impédances identiques de $30\angle 30^\circ \Omega$ branchées en triangle sont alimentées par un réseau triphasé $U = 208 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$. Sachant que chaque conducteur de la ligne d'alimentation possède une impédance de $(0,8 + j 0,6) \Omega$, calculer l'amplitude de la tension aux bornes du récepteur.
On place un ensemble de trois condensateurs de réactance $-j 60 \Omega$ chacun en parallèle avec le récepteur.
Calculer la nouvelle tension aux bornes du récepteur.

8. Un réseau triphasé $208 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$ (séquence 123) à quatre conducteurs alimente une charge connectée en étoile dans laquelle on a :

$$\underline{Z}_1 = 10\angle 0^\circ \Omega, \quad \underline{Z}_2 = 15\angle 30^\circ \Omega, \quad \underline{Z}_3 = 10\angle -30^\circ \Omega.$$

Calculer l'intensité des courants électriques dans les différents conducteurs ainsi que la puissance active totale absorbée.

On alimente maintenant cette charge déséquilibrée par un réseau $208 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$ à trois conducteurs (le conducteur neutre n'est plus connecté à la charge).

Calculer les courants dans les conducteurs ainsi que les tensions aux bornes des impédances constituant la charge.

9. Une usine alimentée en tension triphasée $380 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$ comprend :

- 300 moteurs absorbant chacun une puissance active de 5 kW sous un $\cos\varphi$ de $0,72$,
- 150 moteurs absorbant chacun une puissance active de 20 kW sous un $\cos\varphi$ de $0,85$,
- 200 lampes d'une puissance unitaire de 500 W .
- Une batterie de condensateurs de 30 kvars .

9.1. Calculer le $\cos\varphi$ global de l'installation, l'intensité absorbée sur les lignes d'alimentation.

On désire remonter le $\cos\varphi$ à $0,97$, indiquer la capacité de chacun des 3 condensateurs montés en triangle nécessaire à cette opération.

9.2. Calculer la nouvelle intensité en ligne absorbée.

9.3. Calculer la capacité des 3 condensateurs s'ils étaient montés en étoile.

10. Un réseau triphasé $440 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$ (séquence 123) à quatre conducteurs alimente un récepteur équilibré connecté en étoile dans lequel on a : $\underline{Z} = 15\angle 35^\circ \Omega$.

10.1. Calculer l'intensité des courants électriques dans les conducteurs d'alimentation et dans le neutre (détailler les calculs, écrire les complexes sous formes cartésienne et polaire lorsque nécessaire). En faire une représentation vectorielle.

10.2. Calculer la puissance active totale absorbée.

10.3. Calculer la puissance réactive totale absorbée.

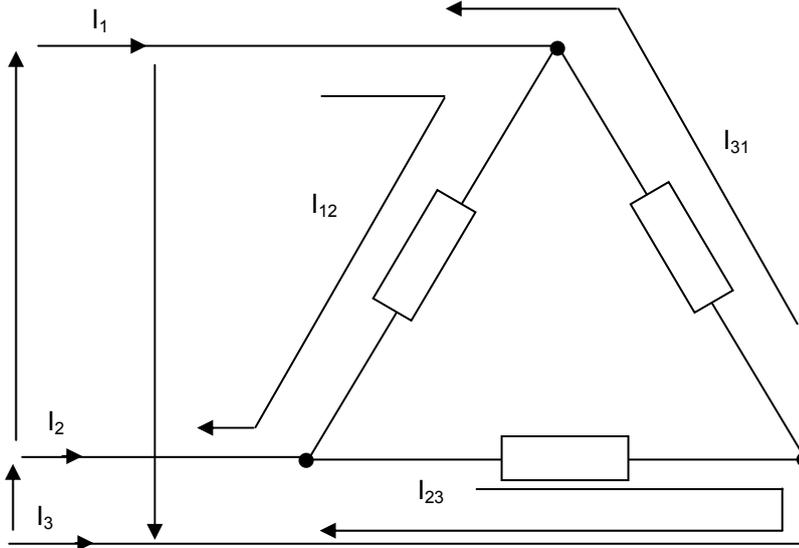
Solutions

1.

Appliquez les tensions entre phases (séquence 123) tel que le représente la Fig. suivante :

Les courants choisis sont alors donnés par

$$\underline{I}_{12} = \frac{U_{12}}{\underline{Z}} = \frac{100 \times \sqrt{3} \angle 120^\circ}{20 \angle 45^\circ} = 8,66 \angle 75^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{U_{23}}{\underline{Z}} = 8,66 \angle -45^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{U_{31}}{\underline{Z}} = 8,66 \angle 195^\circ \text{ A}$$



Pour obtenir les courants de ligne comme le montre le diagramme du circuit, il suffit d'appliquer la loi de Kirchhoff à chaque noeud de la charge d'où :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} + \underline{I}_{13} = 8,66 \angle 75^\circ - 8,66 \angle 195^\circ = 15 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{21} + \underline{I}_{23} = -8,66 \angle 75^\circ + 8,66 \angle -45^\circ = 15 \angle -75^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} + \underline{I}_{32} = 8,66 \angle 195^\circ - 8,66 \angle -45^\circ = 15 \angle 165^\circ \text{ A}.$$

Le diagramme vectoriel des différents courants est représenté sur la figure ci-dessus.

$$W_1 = UI \cos(30^\circ + \theta) \text{ et } W_2 = UI \cos(30^\circ - \theta) \text{ avec } U = \sqrt{3} \times 100 \text{ V et } I = \sqrt{3} \times 8,66 \text{ A}.$$

Ainsi qu'un déphasage de 45° . En substituant ces valeurs, nous obtenons :

$$W_1 = \sqrt{3} \times 100 (\sqrt{3} \times 8,66) \cos(30^\circ + 45^\circ) = 672,41 \text{ W}$$

$$W_2 = \sqrt{3} \times 100 (\sqrt{3} \times 8,66) \cos(30^\circ - 45^\circ) = 2509,55 \text{ W}$$

La puissance totale est alors $P_T = W_1 + W_2 = 3181,9 \text{ W}$.

Nous trouvons bien la même valeur qu'avec la relation

$$P = \sqrt{3} UI \cos \theta = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 100 (\sqrt{3} \times 8,66) \cos 45^\circ = 3181,9 \text{ W}$$

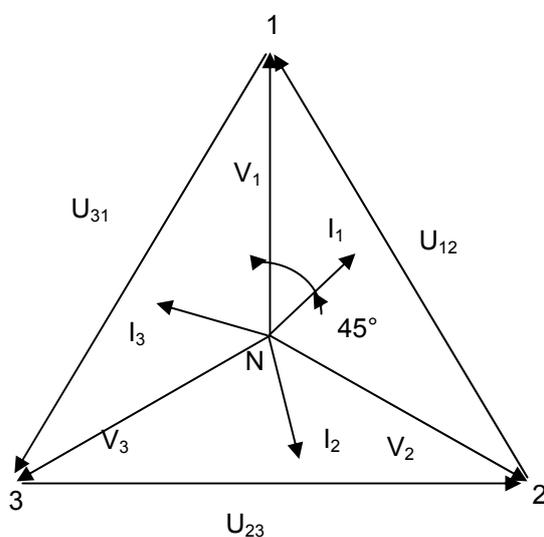
On peut, également, se ramener à une charge en étoile en appliquant le théorème de Kenelly. Chaque impédance vaudra désormais $\frac{20\angle 45^\circ}{3} = 6.66\angle 45^\circ \Omega$.

Les intensités de ligne sont donc :

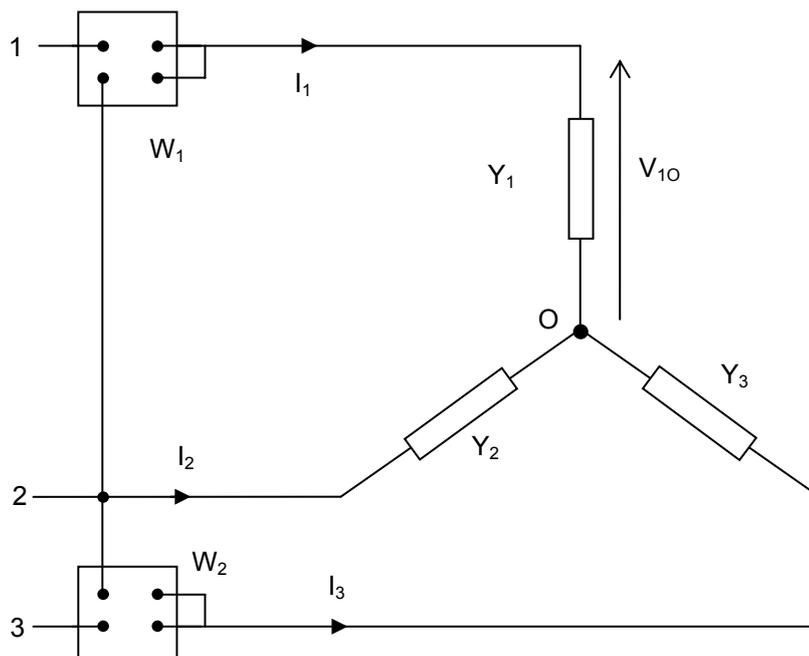
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}} = \frac{100\angle 90^\circ}{6.66\angle 45^\circ} = 15\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}} = \frac{100\angle -30^\circ}{6.66\angle 45^\circ} = 15\angle -75^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}} = \frac{100\angle 210^\circ}{6.66\angle 45^\circ} = 15\angle 165^\circ \text{ A}$$



Dans la méthode des deux wattmètres, en admettant un branchement comme indiqué ci-dessous,



$$W_1 = U_{12} I_1 \cos(\overrightarrow{U_{12}}, \overrightarrow{I_1}) \text{ et } W_2 = U_{32} I_3 \cos(\overrightarrow{U_{32}}, \overrightarrow{I_3})$$

or $(\overrightarrow{U_{12}}, \overrightarrow{I_1}) = 30^\circ + 45^\circ$ et $(\overrightarrow{U_{32}}, \overrightarrow{I_3}) = 30^\circ - 45^\circ$

$$W_1 = U_{12} I_1 \cos(\overrightarrow{U_{12}}, \overrightarrow{I_1}) = \sqrt{3} \times 100 \times 15 \times \cos 75^\circ = 672,43 \text{ W}$$

$$W_2 = U_{32} I_3 \cos(\overrightarrow{U_{32}}, \overrightarrow{I_3}) = \sqrt{3} \times 100 \times 15 \times \cos(-15^\circ) = 2509,55 \text{ W}$$

2. Méthode de Boucherot

P(W)	Q(vars)	S(VA)
lampes : 15000		
moteurs : 16600	$16600 \times \text{tg } \varphi = 16600 \times 0,62 = 10292$	
condensateur : 0	$3C\omega U^2 = 3 \times 60 \times 314 \times 120^2 \times 10^{-6} = -815$	
bobines : $3 \times 5 \times 20,3^2 = 6180$	$3\omega l^2 = 3 \times 3,14 \times 20,4^2 = 3880$	
total : 37780	$10292 - 815 + 3880 = 13377$	$\sqrt{37780^2 + 13377^2} = 40078$

$$\text{Courant résultant : } I = \frac{S}{\sqrt{3} \times U} = \frac{40190}{\sqrt{3} \times 120} = 193 \text{ A}$$

$$\text{Facteur de puissance : } \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{37780}{40190} = 0,94 .$$

Après relèvement du facteur de puissance :

P(W)	Q(vars)	S(VA)
avant : 37780	13377	
après : 37780	$37780 \times \text{tg}(\arccos 0,98) = 7671,6$	
	$\Delta Q = -5705,4$	

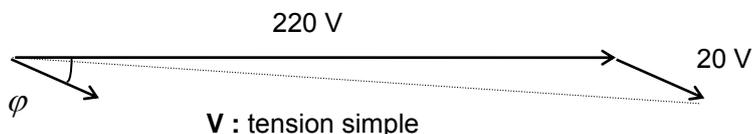
$$\text{En étoile : } |\Delta Q| = 5705,4 \Rightarrow C_Y = \frac{Q}{3\omega U^2/3} = \frac{5705,4}{3 \times 314 \times 120^2/3} \approx 1,26 \text{ mF}$$

$$\text{En triangle } C_\Delta = \frac{5705,4}{3 \times 314 \times 120^2} \approx 420 \mu\text{F} .$$

3.

$$\text{Calcul de l'intensité absorbée sur la ligne : } I = \frac{P}{\sqrt{3} \times U \times \cos \varphi} = \frac{46860}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,71} \approx 100 \text{ A} .$$

La d.d.p. aux bornes de la résistance de la ligne est donc : $0,2 \times 100 = 20 \text{ V}$, en phase avec le courant I :



$$V = \sqrt{(220 + 20 \times 0,71)^2 + (20 \times \sin(\arccos 0,71))^2} = 234,6 \text{ V} \Rightarrow U = 234,6 \times \sqrt{3} \approx 406,4 \text{ V}$$

4. $P = W1 + W2 = 93 + (-53) = 40 \text{ W}$.

$Q = \sqrt{3} \times (W2 - W1) = \sqrt{3} \times (-53 - 93) \approx -253 \text{ vars}$. Le récepteur fournit de la puissance réactive, il est donc de nature capacitive.

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P} = \arctg \frac{253}{40} \approx 81^\circ \text{ (déphasage AV, capacitif)}$$

5.

Raisonnement "monophasé" : chaque groupe de lampes connecté entre une phase et le neutre est un récepteur monophasé absorbant une puissance de 1600 W (16 fois 100 W).

$$P = UI \cos \varphi \Rightarrow I = \frac{P}{U \cos \varphi}$$

Ici les lampes à incandescence ont un $\cos \varphi = 1$, on les considère équivalentes à

des résistances pures.

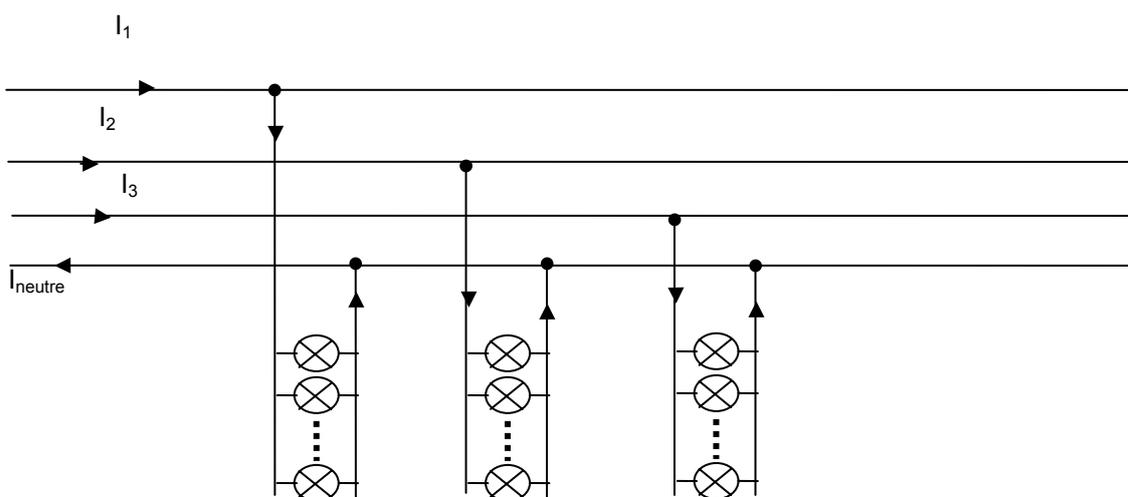
$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{P}{U} = \frac{1600}{380/\sqrt{3}} = 7,3 \text{ A}$$

Raisonnement "triphasé" : on considère les 3 groupements de lampes comme les 3 dipôles d'un récepteur triphasé absorbant une puissance de $3 \times 1600 = 4800 \text{ W}$

$P = \sqrt{3} UI \cos \varphi$, le $\cos \varphi$ des lampes étant considéré comme égal à 1, il vient :

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U} = \frac{4800}{\sqrt{3} \times 380} = \frac{3 \times 1600}{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 220} = \frac{1600}{220} = 7,3 \text{ A}$$

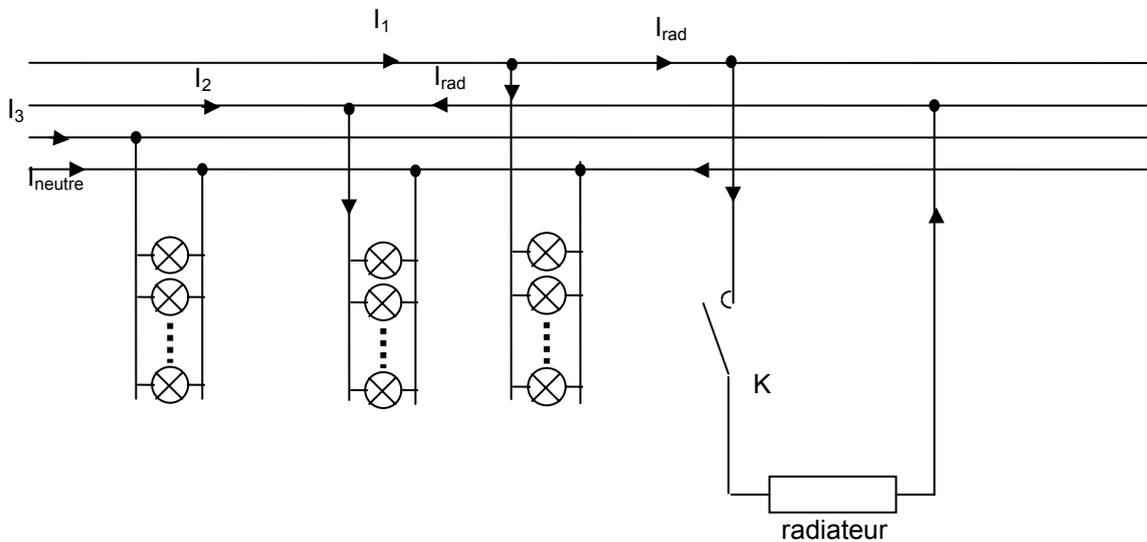
Pour calculer le courant dans le neutre, il faut établir une équation de nœud. On considère un instant t où les intensités I_1, I_2, I_3 affluent vers les lampes et repartent par le conducteur neutre (une demi période plus tard, le sens de circulation du courant s'inverse, il s'agit de tensions et de courants alternatifs).



Ainsi : $\vec{I}_{neutre} = \vec{I}_{1L} + \vec{I}_{2L} + \vec{I}_{3L}$. Comme les intensités sont des vecteurs de même module et déphasés de 120° , leur somme est nulle ainsi que l'intensité dans le conducteur neutre.

2. Le radiateur est un récepteur monophasé alimenté sous la tension composée U_{12} . L'intensité dans le radiateur, dont le $\cos \varphi$ est égal à 1, est égale à $I_{rad} = \frac{P}{U} = \frac{3800}{380} = 10 \text{ A}$.

Intensité absorbée sur les lignes lorsque les lampes et le radiateur sont connectés : on écrit une équation de nœud. Pour ce faire, il est bon de s'aider d'un schéma sur lequel on fait figurer le sens des intensités. On choisit une polarité correspondant à un instant t et on trace les flèches indiquant le sens de circulation des courants comme s'il s'agissait d'un circuit alimenté par une tension continue (raisonnement valable pendant une alternance, après, les flèches seront dans l'autre sens).

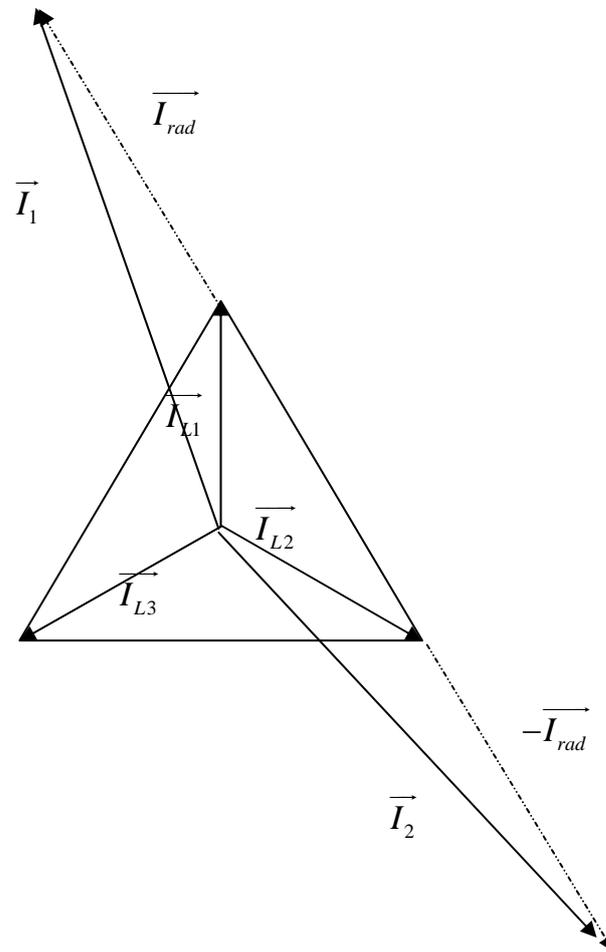


$$\underline{I_1} = \underline{I_{1Lampes}} + \underline{I_{radiateur}}$$

$$\underline{I_2} = \underline{I_{2Lampes}} - \underline{I_{radiateur}}$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \vec{I}_L + \vec{I}_{rad} \\ \vec{I}_2 = \vec{I}_L - \vec{I}_{rad} \end{cases}$$



$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1Lampes} + \underline{I}_{radiateur} = 7,3 \angle 90^\circ + 10 \angle 120^\circ = 16,7 \angle 107,4^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2Lampes} - \underline{I}_{radiateur} = 7,3 \angle -30^\circ - 10 \angle 120^\circ = 16,7 \angle -47,4^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{3Lampes} = 7,3 \angle -150^\circ \text{ A}$$

Le courant dans le neutre est toujours nul car le courant du radiateur ne va pas au neutre :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{1L} + \underline{I}_{2L} + \underline{I}_{3L} = 0 \text{ A}$$

6. Puissances moteurs : $P_m = P_1 + P_2 = 260\text{kW}$

$$Q_m = \sqrt{3}(P_1 - P_2) = 242,48 \text{ kvars}$$

$$S_m = \sqrt{P_m^2 + Q_m^2} = 355,5 \text{ kvars}$$

courant-facteur de puissance :

$$I_m = \frac{S_m}{\sqrt{3}U} = 540 \text{ A} \quad \cos \varphi_m = \frac{P_m}{S_m} = 0,73$$

Courant et facteur de puissance totaux :

$$P_t = P_m + P_I + P_f = 291,5\text{kW} \quad Q_t = Q_m = 242,48\text{kVAR}$$

$$S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = 372 \text{ kVA}$$

$$I_t = \frac{S_t}{\sqrt{3}U} = 576 \text{ A} \quad \cos \varphi_t = \frac{P_t}{S_t} = 0,768$$

Justification :

Puissance réactive 3 fois plus importante en triangle qu'en étoile :

$$\text{Puissance réactive : } Q_c = -3C_w U^2 = 20,414\text{kVAR}$$

Courant et facteur de puissance :

$$P_t = P_m + P_I + P_f = 291,5\text{kW} \quad Q_t = Q_m - Q_c = 222,06\text{kvars}$$

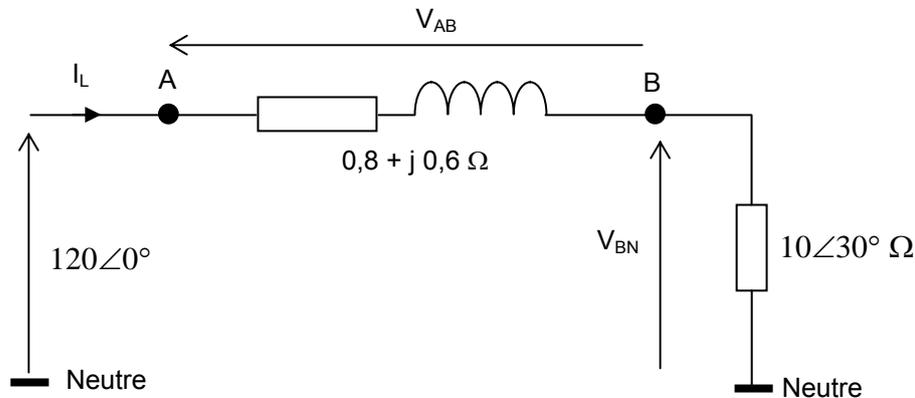
$$S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = 366 \text{ kVA}$$

$$I_t = \frac{S_t}{\sqrt{3}U} = 557,6 \text{ A} \quad \cos \varphi_t = \frac{P_t}{S_t} = 0,795$$

Méthode des deux wattmètres :

$$P_1 = 209,85\text{kW} \quad P_2 = 81,65\text{kW}$$

7. Il faut appliquer la transformation de Kenelly au récepteur en triangle pour transformer ce dernier en étoile afin de pouvoir extraire un circuit monophasé. Chaque impédance du récepteur en étoile vaudra $\frac{Z}{3} = \frac{30\angle 30^\circ}{3} = 10\angle 30^\circ \Omega$. Les tensions simples alimentant le réseau sont de $\frac{208}{\sqrt{3}} = 120 \text{ V}$



L'impédance du conducteur de ligne et du récepteur sont en série, d'où :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_{ligne} + \underline{Z}_{récepteur} = 0,8 + j0,6 + 8,66 + j5,0 = 9,46 + j5,6 = 11,0\angle 30,6^\circ \Omega$$

On en déduit $\underline{I}_L = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{120\angle 0^\circ}{11,0\angle 30,6^\circ} = 10,9\angle -30,6^\circ \text{ A}$

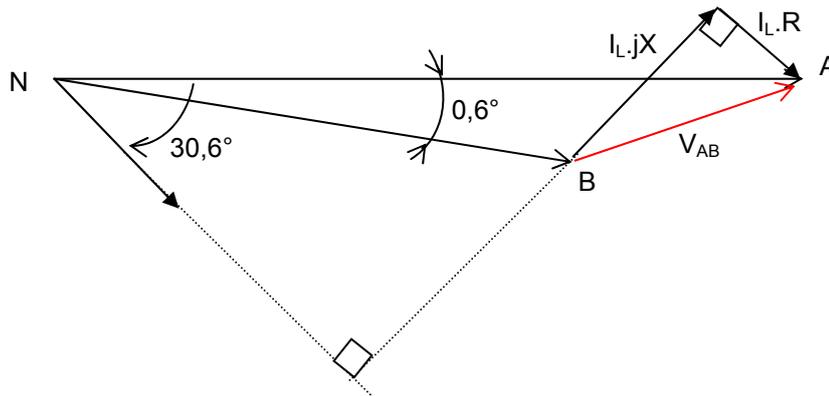
La tension aux bornes de la charge est alors :

$$\underline{V}_{BN} = \underline{I}_L \cdot \underline{Z}_{récepteur} = (10,9\angle -30,6^\circ) \cdot (10\angle 30^\circ) = 109\angle -0,6^\circ \text{ V}$$

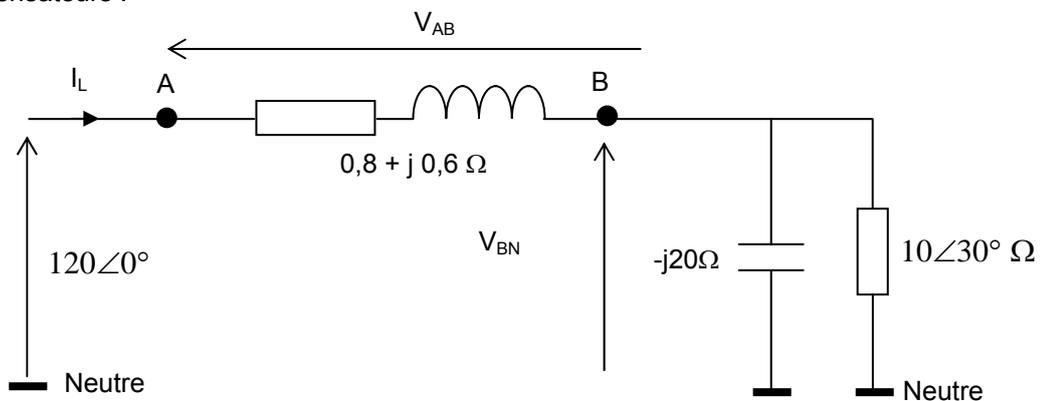
La tension entre phase aux bornes du récepteur est :

$$U_{récepteur} = \sqrt{3} \cdot V_{récepteur} = \sqrt{3} \cdot 109 = 189 \text{ V}$$

L'impédance des conducteurs fait chuter la tension de 208 V à 189 V aux bornes de la charge.



Ajout de condensateurs :



Le condensateur ($-j30 \Omega$) et l'impédance $10 \angle 30^\circ$ sont en parallèle donc l'impédance équivalente est :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{(10 \angle 30^\circ) \cdot (-j20)}{(8,66 + j5) - j20} = 11,55 \angle 0^\circ \Omega$$

Cette impédance est en série avec l'impédance de la ligne et donne une impédance totale vue du générateur :

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{eq} = (0,8 + j0,6) + (11,55 \angle 0^\circ) = 12,36 \angle 2,78^\circ \Omega$$

L'intensité dans les lignes de phase est :

$$\underline{I}_L = \frac{V}{Z_T} = \frac{120 \angle 0^\circ}{12,36 \angle 2,78^\circ} = 9,73 \angle -2,78^\circ \text{ A}$$

cette intensité correspond à la phase n°1 par exemple, les intensités dans les autres lignes de phase seraient déphasées de 120° par rapport à celle-ci.

La tension aux bornes de la charge est :

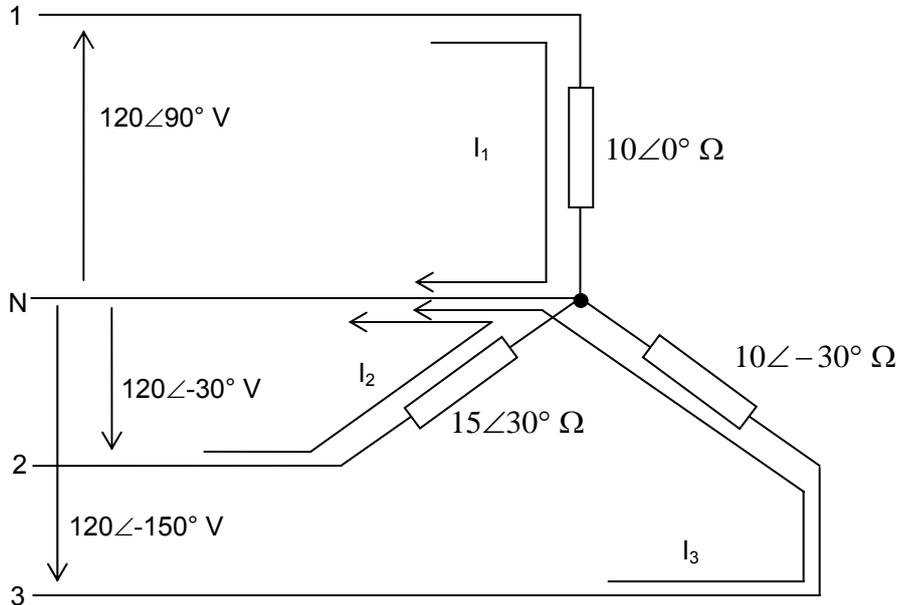
$$\underline{V}_{BN} = \underline{Z}_T \cdot \underline{I}_L = (11,55 \angle 0^\circ) \cdot (9,73 \angle -2,78^\circ) = 112 \angle -2,78^\circ \Omega$$

La tension entre phases à l'entrée du récepteur est égale à :

$$U_B = \sqrt{3} \cdot 112 = 194 \text{ V}$$

Comparé à la valeur précédente de 189 V, on constate que la mise en place de condensateur diminue la chute de tension en ligne en diminuant l'intensité qui parcourt les lignes de phase : 9,73 A au lieu de 10,9 A.

8.



$$\underline{I}_1 = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{120\angle 90^\circ}{10\angle 0^\circ} = 12\angle 90^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{120\angle -30^\circ}{15\angle 30^\circ} = 8\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{V_3}{Z_3} = \frac{120\angle -150^\circ}{10\angle -30^\circ} = 12\angle -120^\circ \text{ A}$$

Dans le conducteur neutre circule un courant égale à la somme vectorielle des intensités dans les trois conducteurs de phase.

$$\underline{I}_N = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -(12\angle 90^\circ + 8\angle -60^\circ + 12\angle -120^\circ) = 5,69\angle 69,4^\circ \text{ A}$$

L'impédance $\underline{Z}_1 = 10\angle 0^\circ \Omega$ est traversée par un courant $\underline{I}_1 = 12\angle 90^\circ \text{ A}$ et la puissance active dissipée dans cette impédance est $P_1 = 10 \times 12^2 = 1440 \text{ W}$.

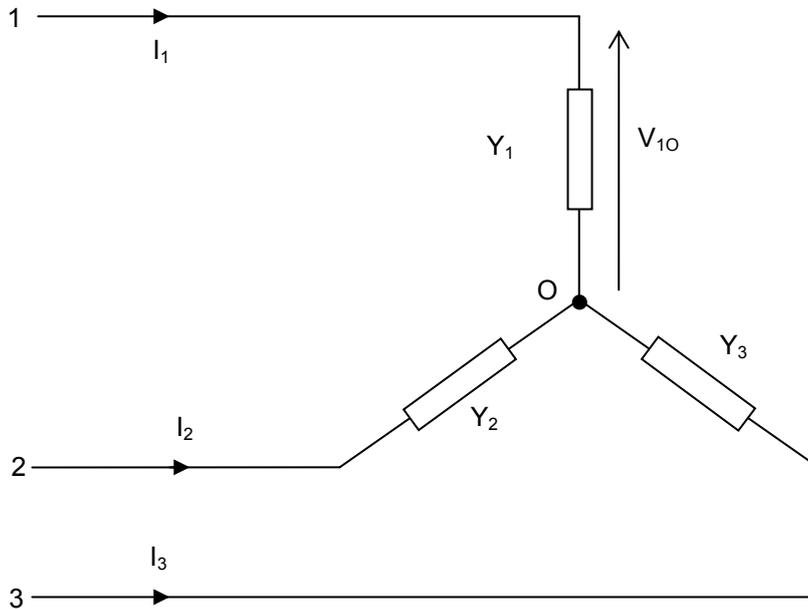
L'impédance $\underline{Z}_2 = 15\angle 30^\circ \Omega = (13 + j7,5)\Omega$ est traversée par un courant $\underline{I}_2 = 8\angle -60^\circ \text{ A}$ et la puissance active dissipée dans cette impédance est $P_2 = 13 \times 8^2 = 832 \text{ W}$.

L'impédance $\underline{Z}_3 = 10\angle -30^\circ \Omega = (8,66 - j5)\Omega$ est traversée par un courant $\underline{I}_3 = 12\angle -120^\circ \text{ A}$ et la puissance active dissipée dans cette impédance est $P_3 = 8,66 \times 12^2 = 1247 \text{ W}$.

La puissance totale absorbée par le récepteur est :

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 1440 + 832 + 1247 = 3519 \text{ W}.$$

Lorsque le neutre n'est plus connecté à la charge, le point N où sont connectés les trois impédances du récepteur n'est plus au potentiel du neutre. Appelons ce point O, et déterminons son potentiel par rapport au neutre.



On peut exprimer les courants circulant dans les phases en fonction des admittances ($1/Z$) des dipôles composants le récepteur :

$$\underline{I}_1 = \underline{V}_{1O} \cdot \underline{Y}_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{V}_{2O} \cdot \underline{Y}_2, \quad \underline{I}_3 = \underline{V}_{3O} \cdot \underline{Y}_3 \quad (1)$$

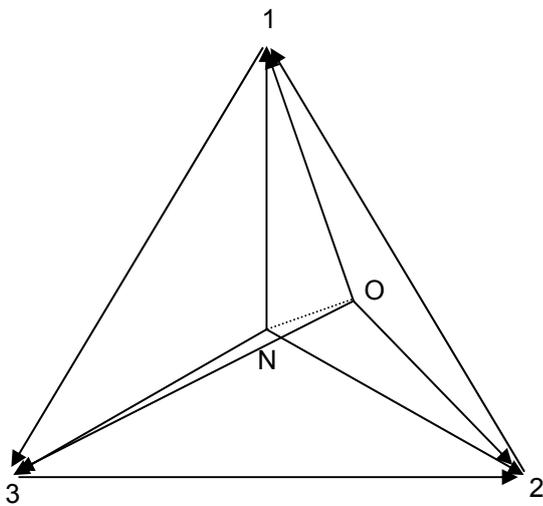
En appliquant la loi des nœuds au point O, il vient :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad (2)$$

Soit en exprimant (2) en fonction de (1) :

$$\underline{V}_{1O} \cdot \underline{Y}_1 + \underline{V}_{2O} \cdot \underline{Y}_2 + \underline{V}_{3O} \cdot \underline{Y}_3 = 0 \quad (3)$$

Exprimons les tensions V_{1O} en fonction des tensions simples et de la tension V_{NO} :



$$\underline{V}_{1O} = \underline{V}_{1N} + \underline{V}_{NO}, \quad \underline{V}_{2O} = \underline{V}_{2N} + \underline{V}_{NO}, \quad \underline{V}_{3O} = \underline{V}_{3N} + \underline{V}_{NO} \quad (4)$$

En substituant les expressions de la relation (4) dans la relation (3), nous obtenons :

$$\left(\underline{V}_{1N} + \underline{V}_{NO}\right) \cdot \underline{Y}_1 + \left(\underline{V}_{2N} + \underline{V}_{NO}\right) \cdot \underline{Y}_2 + \left(\underline{V}_{3N} + \underline{V}_{NO}\right) \cdot \underline{Y}_3 = 0$$

On en déduit :

$$\underline{V}_{ON} = \frac{\underline{V}_{1N} \cdot \underline{Y}_1 + \underline{V}_{2N} \cdot \underline{Y}_2 + \underline{V}_{3N} \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\text{Ici, } \underline{Y}_1 = \frac{1}{10 \angle 0^\circ} = 0,1 \text{ mhos}, \underline{Y}_2 = \frac{1}{15 \angle 30^\circ} = 0,0577 - j0,033 \text{ mhos},$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{10 \angle -30^\circ} = 0,0866 - j0,050 \text{ mhos}.$$

$$\text{D'où : } \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0,244 + j0,0167 = 0,244 \angle 3,93^\circ \text{ mhos}.$$

$$\underline{V}_{1N} \cdot \underline{Y}_1 = (120 \angle 90^\circ) \cdot (0,1) = 12 \angle 90^\circ = j12$$

$$\underline{V}_{2N} \cdot \underline{Y}_2 = (120 \angle -30^\circ) \cdot (0,0667 \angle -30^\circ) = 8,0 \angle -60^\circ = 4,0 - j6,93$$

$$\underline{V}_{3N} \cdot \underline{Y}_3 = (120 \angle -150^\circ) \cdot (0,01 \angle 30^\circ) = 12 \angle -120^\circ = -6,0 - j10,4$$

$$\underline{V}_{1N} \cdot \underline{Y}_1 + \underline{V}_{2N} \cdot \underline{Y}_2 + \underline{V}_{3N} \cdot \underline{Y}_3 = -2,0 - j5,33 = 5,69 \angle 249,4^\circ$$

$$\text{On en déduit } \underline{V}_{ON} = (5,69 \angle 249,4^\circ) \cdot (0,244 \angle 3,93^\circ) = 23,3 \angle 245,5^\circ = -9,66 - j21,2 \text{ V}$$

Les tensions aux bornes des impédances de charge peuvent s'exprimer en fonction des tensions phase-neutre correspondantes et de la tension de déplacement du neutre :

$$\underline{V}_{1O} = \underline{V}_{1N} + \underline{V}_{NO} = 120 \angle 90^\circ + (9,66 + j21,2) = 141,2 \angle 86,08^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{2O} = \underline{V}_{2N} + \underline{V}_{NO} = 120 \angle -30^\circ + (9,66 + j21,2) = 120 \angle -18,9^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{3O} = \underline{V}_{3N} + \underline{V}_{NO} = 120 \angle -150^\circ + (9,66 + j21,2) = 102 \angle 202,4^\circ \text{ V}$$

Afin d'obtenir l'intensité du courant dans chaque phase, il suffit d'effectuer le produit des tensions par les admittances de chacun des dipôles :

$$\underline{I}_1 = \underline{V}_{1O} \cdot \underline{Y}_1 = (141,2 \angle 86,08^\circ) \cdot (0,1 \angle 0^\circ) = 14,12 \angle 86,08^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{V}_{2O} \cdot \underline{Y}_2 = (120 \angle -18,9^\circ) \cdot (0,0667 \angle -30^\circ) = 8,0 \angle -48,9^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{V}_{3O} \cdot \underline{Y}_3 = (102 \angle 202,4^\circ) \cdot (0,1 \angle 30^\circ) = 10,2 \angle 232,4^\circ \text{ A}$$

9.

Solution par Boucherot :

récepteurs	P kW	Q kvars	S kVA
lampes	100	0	
moteurs 5kW	1500	1445,78	
moteurs 20kW	3000	1859,23	
condensateurs	0	-30	
total avant C	4600	3275,01	5646,74
total après C	4600	1152,87	4742,27

Avant installation de la nouvelle batterie de condensateurs :

$$I_{\text{ligne}} = \frac{S}{\sqrt{3}U} = 8579,34 \approx 8580 \text{ A}$$

$$\cos \varphi_{\text{global}} = \frac{P}{S} = \frac{4600 \times 10^3}{5646,74 \times 10^3} = 0,8146.$$

Après installation :

La puissance active totale consommée ne change pas (la batterie de condensateur installée en parallèle sur l'installation ne modifie pas la d.d.p. aux bornes des différents récepteurs), la puissance réactive devient avec $\cos \varphi = 0,97$:

$Q' = P \times \tan(\arccos 0,97) = 1152,87 \text{ kvars}$, La puissance réactive fournie par la batterie de condensateurs est donc :

$$\Delta Q = 3275,01 - 1152,87 = 2122,14 \text{ kvars}$$

Or $|\Delta Q| = 3C\omega V_c$, avec V_c d.d.p. aux bornes des condensateurs.

En triangle, $V_c = U = 380 \text{ V}$, en étoile $V_c = V = \frac{380}{\sqrt{3}} \text{ V}$, d'où : $C = \frac{|\Delta Q|}{3\omega V_c}$.

En triangle : $C = \frac{2122,14 \times 10^3}{3 \cdot 314 \cdot 380^2} \approx 15,6 \text{ mF}$.

En étoile, $C_{\text{étoile}} = 3 C_{\text{triangle}} = 46,8 \text{ mF}$.

La nouvelle intensité absorbée est : $I' = \frac{P}{U \cos \varphi'} = \frac{4600 \times 10^3}{380 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,97} \approx 7205 \text{ A}$, soit 1375 A de moins par phase

! Cela signifie que les pertes Joule dans les lignes seront réduites de :

$$\frac{P_{\text{Après}}}{P_{\text{Avant}}} = \frac{R_{\text{ligne}} \times 7205^2}{R_{\text{ligne}} \times 8580^2} = 0,705.$$

Les transformateurs d'alimentation seront eux aussi soulagés, s'écartant de la zone de possible surcharge.

10.

10.1. Séquence 123 $\Rightarrow \underline{V}_1 = 254\angle 90^\circ \text{ V}$, $\underline{V}_2 = 254\angle -30^\circ \text{ V}$, $\underline{V}_3 = 254\angle 210^\circ \text{ V}$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}} = \frac{254\angle 90^\circ}{15\angle 35^\circ} \approx 17\angle 55^\circ \text{ A} \\ \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}} = \frac{254\angle -30^\circ}{15\angle 35^\circ} \approx 17\angle -65^\circ \text{ A} \\ \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}} = \frac{254\angle 210^\circ}{15\angle 35^\circ} \approx 17\angle 175^\circ \text{ A} \end{cases}$$

L'intensité du courant électrique dans le neutre est nulle, en effet :

$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ en triphasé équilibré (la somme de grandeurs triphasées équilibrées est toujours nulle).

$$10.2. P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{3} \cdot 440 \cdot 17 \cdot \cos(35^\circ) \approx 10,6 \text{ kW}$$

$$\text{ou encore : } P = \operatorname{Re}(\underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^*) + \operatorname{Re}(\underline{V}_2 \cdot \underline{I}_2^*) + \operatorname{Re}(\underline{V}_3 \cdot \underline{I}_3^*) = 3 \cdot \operatorname{Re}(\underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^*) = 3 \cdot \operatorname{Re}(254\angle 90^\circ \times 17\angle -55^\circ)$$

$$P = 3 \cdot (254 \times 17 \times \cos(90 - 55)) \approx 10,6 \text{ kW}$$

$$\text{ou encore : } P = 3 \cdot (R \cdot I^2) = 3 \cdot ((Z \cdot \cos \varphi) \cdot I^2) = 3 \cdot (15 \times \cos(35^\circ) \times 17^2) \approx 10,6 \text{ kW}$$

$$\text{ou encore : } P = 3 \cdot \left(\frac{U_{RZ}^2}{R} \right) = 3 \cdot \left(\frac{(I \times Z \times \cos(\varphi))^2}{Z \cdot \cos(\varphi)} \right) = 3 \cdot \left(\frac{(17 \times 15 \times \cos(35^\circ))^2}{15 \cdot \cos(35^\circ)} \right) \approx 10,6 \text{ kW}$$

$$10.3. Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = \sqrt{3} \cdot 440 \cdot 17 \cdot \sin(35^\circ) \approx 7,43 \text{ kvars}$$

$$\text{ou encore : } Q = \operatorname{Im}(\underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^*) + \operatorname{Im}(\underline{V}_2 \cdot \underline{I}_2^*) + \operatorname{Im}(\underline{V}_3 \cdot \underline{I}_3^*) = 3 \cdot \operatorname{Im}(\underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^*) = 3 \cdot \operatorname{Im}(254\angle 90^\circ \times 17\angle -55^\circ)$$

$$Q = 3 \cdot (254 \times 17 \times \sin(90 - 55)) \approx 7,43 \text{ kvars}$$

ou encore : $Q = 3 \cdot (X \cdot I^2) = 3 \cdot ((Z \cdot \sin \varphi) \cdot I^2) = 3 \cdot (15 \times \sin(35^\circ) \times 17^2) \approx 7,46 \text{ kvars}$

ou encore : $Q = 3 \cdot \left(\frac{U_{XZ}^2}{X} \right) = 3 \cdot \left(\frac{(I \times Z \times \sin(\varphi))^2}{Z \cdot \sin(\varphi)} \right) = 3 \cdot \left(\frac{(17 \times 15 \times \sin(35^\circ))^2}{15 \cdot \sin(35^\circ)} \right) \approx 7,46 \text{ kvars}$

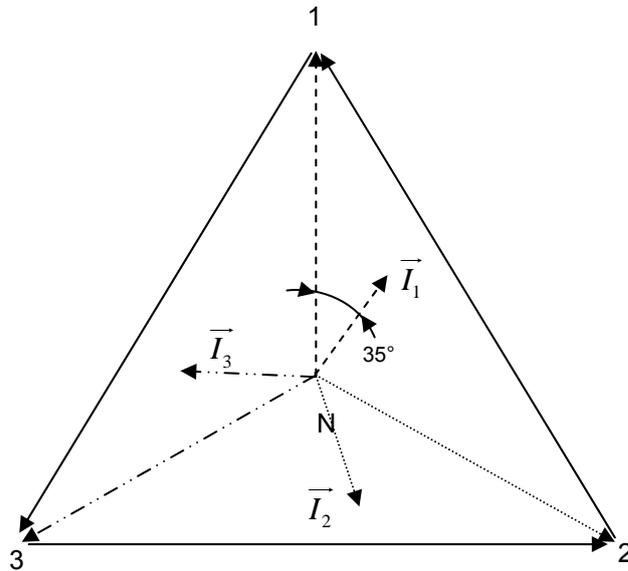


Table des matières

Théorèmes et principes généraux de résolution des circuits	1
Définitions générales	1
Loi de Kirchhoff	3
Première loi : loi des nœuds.....	3
Deuxième loi : loi des mailles	4
Mise en équation	5
Principe de superposition	7
Théorème de Thévenin	12
Méthode d'application du théorème de Thevenin	12
Théorème de Norton	21
Exercices :	25
Solutions.....	30
Le courant alternatif.....	46
Etude des courants non sinusoïdaux :	47
Fréquence du courant	47
Intensité moyenne	47
Intensité efficace, tension efficace :	47
Hypothèse du courant sinusoïdal industriel	49
Représentation d'un courant sinusoïdal : représentation vectorielle et notation imaginaire.....	51
Notation imaginaire	54
Transformée cissoïdale	55
La loi d'Ohm en courant sinusoïdal, notion d'impédance	57
Premier cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur une résistance pure	57
Deuxième cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur une inductance pure	58
Troisième cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur un condensateur pur	59
Quatrième cas : débit d'une source de tension sinusoïdale sur un circuit RLC série.....	60
Cas particulier de la résonance.....	64
Groupements d'impédances	64
Notion de puissance en alternatif.....	65
Puissance active et puissance réactive	67
Puissance apparente.....	68
Puissance complexe	69
L'énergie réactive : définitions et rappels essentiels	70
Energies active, réactive, apparente.....	70
Composantes active et réactive du courant.....	71
Composantes active et réactive de la puissance : triangle des puissances	72
Facteur de puissance	73
La compensation de l'énergie réactive.....	75
Théorème de Boucherot : conservation des puissances active et réactive	77
Facteur de puissance et $\cos \varphi$	77
Exercices : puissances en alternatif monophasé	79
Solutions.....	82
Conditions du transfert maximum de puissance d'une source de tension alternative vers une impédance :	91
Exercices de « monophasé » :	93
Tensions et courants polyphasés	95
Système triphasé	97
Tensions dans un système triphasé.....	100
Relation entre tension simple et tension composée.....	101
Réseau équilibré.....	101
Montage en étoile (Y)	102
Montage en triangle (D).....	103
Puissance dissipée dans un montage triphasé.....	104
Montage en triangle :	105
Montage en étoile	106
Comparaison du cuivre nécessaire pour transporter une puissance P en monophasé et en triphasé :	107
Mesure de puissance en triphasé	108
Méthode des deux wattmètres	110
Méthode des deux wattmètres appliquée à des charges équilibrées	113
Annexe facultative : les perturbations harmoniques	116

I Introduction.....	116
Exercices de triphasé :	123
Solutions.....	126

Edition à jour du : 15/10/2007

Le firmament de l'électricité et ses étoiles

				
<p>Alessandro Guiseppe Antonio Anastasio Volta (né à Como, Italie, le 18 Février.1745, mort à Como, Italie, le 5 Mars 1827)</p>	<p>André-Marie Ampère (né à Lyon, le 22 Janvier 1775, mort à Marseille, le 10 Juin 1836)</p>	<p>James Prescott Joule (né à Salford, Angleterre, le 24 Décembre 1818, mort à Salford, Angleterre, le 11 Octobre 1889)</p>	<p>Georg Simon Ohm (né à Erlangen, Allemagne, le 16 Mars 1789, mort à Munich, Allemagne, le 6 Juillet 1854)</p>	<p>Charles William Siemens (né à Lenthe, Allemagne, le 4 Avril 1823, mort à Londres, le 9 Novembre 1883)</p>
				
<p>Charles-Augustin Coulomb (né à Angoulême, le 14 Juin 1736, mort à Paris, le 23 Août, 1806)</p>	<p>Michael Faraday (né à Newington, Surrey, Angleterre, le 22 Sep. 1791, mort à Hampton Court, Middlesex, Angleterre le 25 Août 1867)</p>	<p>Joseph Henry (né à Albany, NY, USA, le 17 Décembre 1797, mort à Washington, USA, le 13 Mai 1878)</p>	<p>Nicola Tesla (né à Smiljan, Croatie, le 10 Juillet 1856, mort à New York le 7 Janvier 1943)</p>	<p>Wilhelm Eduard Weber (né à Wittenberg, Allemagne, le 24 Octobre 1804, mort à Gottingen, Allemagne, le 23 Juin 1891)</p>
				
<p>Heinrich Rudolf Hertz (né à Hamburg, Allemagne, le 22 Février 1857, mort à Bonn, Allemagne, le 1 Janvier 1894)</p>	<p>Arthur Edwin Kennelly (né le 17 Decembre 1861, à Colaba, en Inde, mort le 18 Juin, 1939, à Boston, U.S.A.)</p>	<p>Gustav Robert Kirchhoff (né à Königsberg, Allemagne, le 12 Mars 1824, mort à Berlin, Allemagne, le 17 Octobre 1887)</p>	<p>Léon Charles Thévenin (né à Meaux, le 30 Mars 1857, mort à Paris, en 1926)</p>	<p>Edward Lawry Norton (né à Rockland, Maine, USA, le 28 Juillet 1898, mort à Chatham, New Jersey, USA, le 28 Janvier 1983)</p>