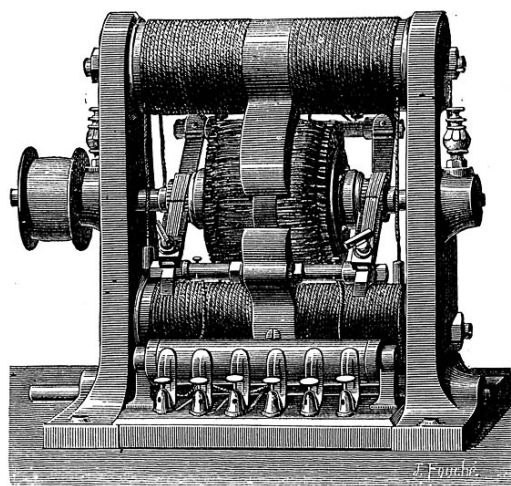
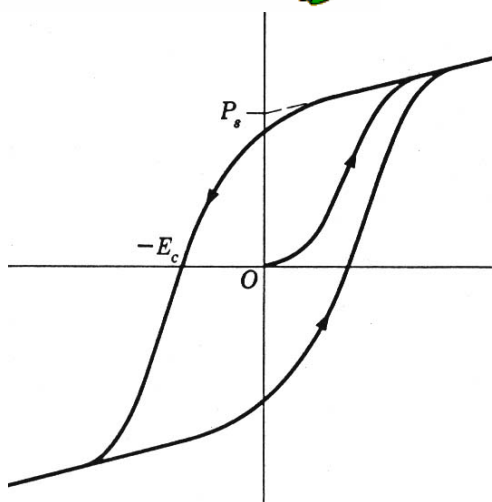
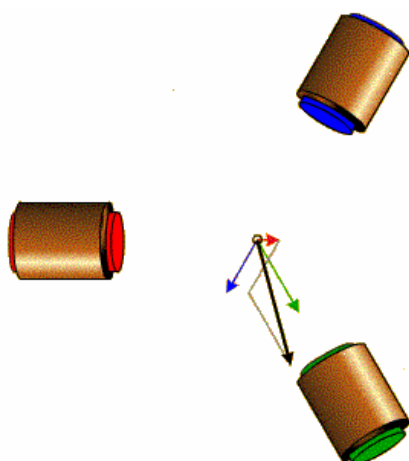
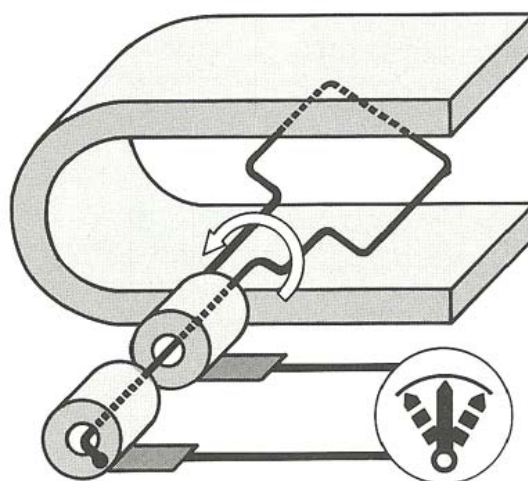
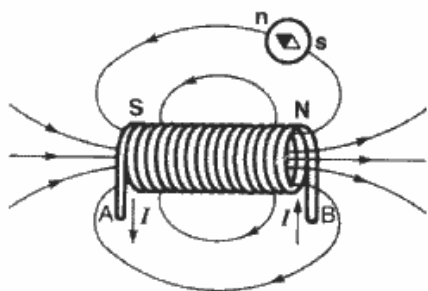


ELECTROMAGNETISME

POUR L'ÉLECTROTECHNIQUE



Licence de Libre Diffusion des Documents -- LLDD version 1

Ce document peut être librement lu, stocké, reproduit, diffusé, traduit et cité par tous moyens et sur tous supports aux conditions suivantes:

- tout lecteur ou utilisateur de ce document reconnaît avoir pris connaissance de ce qu'aucune garantie n'est donnée quant à son contenu, à tout point de vue, notamment véracité, précision et adéquation pour toute utilisation;
- il n'est procédé à aucune modification autre que cosmétique, changement de format de représentation, traduction, correction d'une erreur de syntaxe évidente, ou en accord avec les clauses ci-dessous;
- des commentaires ou additions peuvent être insérés à condition d'apparaître clairement comme tels; les traductions ou fragments doivent faire clairement référence à une copie originale complète, si possible à une copie facilement accessible.
- les traductions et les commentaires ou ajouts insérés doivent être datés et leur(s) auteur(s) doit(vent) être identifiable(s) (éventuellement au travers d'un alias);
- cette licence est préservée et s'applique à l'ensemble du document et des modifications et ajouts éventuels (sauf en cas de citation courte), quelqu'en soit le format de représentation;
- quel que soit le mode de stockage, reproduction ou diffusion, toute personne ayant accès à une version numérisée ce document doit pouvoir en faire une copie numérisée dans un format directement utilisable et si possible éditable, suivant les standards publics, et publiquement documentés, en usage.
- la transmission de ce document à un tiers se fait avec transmission de cette licence, sans modification, et en particulier sans addition de clause ou contrainte nouvelle, explicite ou implicite, liée ou non à cette transmission. En particulier, en cas d'inclusion dans une base de données ou une collection, le propriétaire ou l'exploitant de la base ou de la collection s'interdit tout droit de regard lié à ce stockage et concernant l'utilisation qui pourrait être faite du document après extraction de la base ou de la collection, seul ou en relation avec d'autres documents.

Toute incompatibilité des clauses ci-dessus avec des dispositions ou contraintes légales, contractuelles ou judiciaires implique une limitation correspondante du droit de lecture, utilisation ou redistribution verbatim ou modifiée du document.

<http://pauillac.inria.fr/~lang/licence/lldd.html>

Table des matières

Historique	3
Electromagnétisme	4
Lois fondamentales en électrotechnique	4
Création de champs magnétiques par des aimants permanents	5
Lignes de champ	6
Tube de champ	6
Création de champs magnétiques par des courants électriques	7
Formule de Biot et Savart	7
Complément mathématique : intégrale vectorielle ou circulation d'un vecteur	10
Théorème d'Ampère	11
Exemple d'application du théorème d'Ampère :	12
Excitation magnétique créée par un fil de longueur infini	12
Excitation magnétique créée dans un solénoïde torique	13
Excitation magnétique créée dans un solénoïde cylindrique rectiligne de longueur infini	14
Excitation magnétique créée dans un circuit magnétique de transformateur	16
Force exercée par une induction magnétique sur un courant	17
Flux magnétique	19
Différence de potentiel électrique induite dans un circuit par une variation de flux magnétique	21
Lois de Faraday et de Lenz	21
f.é.m. de "vitesse" produite par une variation de flux "coupé"	22
F.é.m. d'auto-induction	27
F.é.m. de "transformation" produite par une variation du flux "embrassé"	28
Explication qualitative de "l'effet de peau"	29
Courants de Foucault	30
Applications des courants de Foucault	31
Inconvénients des courants de Foucault	33
Principe de la guitare électrique	35
Soufflage magnétique de l'arc électrique dans un contacteur ou un disjoncteur	37
Exercices	38
Principe du flux maximal	39
Diverses définitions de l'inductance	40
Exercices	42
Solutions	45
Influence des matériaux : perméabilité magnétique, magnétisme	47
Classes des matériaux en fonction de leur comportement sous le champ H	47
Le diamagnétisme	48
Le paramagnétisme	48
Le ferrimagnétisme	49
L'antiferromagnétisme	50
Le ferromagnétisme	50
Théorie des domaines élémentaires de Weiss	51
Circuits magnétiques	54
Relation de Hopkinson	56
Analogie de Hopkinson :	57
Exemple :	57
Calcul des circuits magnétiques	59
Première catégorie de calcul : connaissant Φ , calculer ni	59
Entrefer	59
Deuxième catégorie de calcul : connaissant ni , calculer Φ	64
Exercices	66
Hystérésis et bobine à noyau de fer	72
Modélisation de la bobine à noyau de fer	75
Energie emmagasinée	75
Matériau linéaire	75
Bobine parfaite	75
Energie dans une bobine avec ou sans entrefer	76
Pertes ferromagnétiques	78
Pertes par hystérésis	78
Pertes par courant de Foucault	79
Globalisation des pertes : pertes fer	79
Modèle équivalent de la bobine réelle	80
Schéma équivalent simplifié	81
Schéma équivalent complet	82

Exercice.....	83
Circuits couplés linéaires inductances diverses	84
Les huit inductances de deux circuits couplés.....	85
Relations entre les inductances et le rapport du nombre de spires.....	86
Coefficient de couplage et de dispersion	87
Exemple de couplage.....	88
Exercices.....	91
Solutions.....	93
Impédances cycliques	100
Couplage par dispersion	102
Couplage sur un circuit magnétique quelconque.....	103
Amplificateur magnétique.....	106
Les électroaimants.....	109
Constitution	109
Electroaimants alimentés par une tension continue	110
Expression de la force d'attraction	110
Electroaimants alimentés par une tension alternative sinusoïdale	111
Expression de la force d'attraction	111
Spire de Frager : obtention d'une force constante	113
Effet d'une spire fermée placée dans un flux variable $\varphi(t)$	113
Application à l'électroaimant.....	114
Champs magnétiques tournants.....	116
Théorème de Maurice Leblanc	116
Cas de deux bobines.....	117
Théorème de Galileo Ferraris	118
Champ créé par un ensemble de trois bobines décalées de 120° et alimentées en triphasé.....	119

Extrait du **programme de la 1^{re} année de formation O1MM1** concernant l'électromagnétisme :

5 . Electromagnétisme :

Induction magnétique, flux magnétique, excitation magnétique. Théorème d'Ampère.

Rappel des lois de Laplace, Biot et Savart. Applications.

F.é.m. induites.

Cas général : loi de Faraday de Lenz, applications.

Auto-inductance.

Mutuelle inductance coefficient de couplage.

Ferromagnétisme.

Matériaux.

Circuit magnétique en continu.

Circuit magnétique en alternatif.

Bobine à noyau de fer.

Electro-aimant.

Théorème de Leblanc et Ferraris.

Historique

C'est en 1819 qu'Hans-Christian Oersted, physicien danois, découvre qu'une aiguille aimantée, placée à proximité d'un fil métallique parcouru par un courant, est déviée de sa position d'équilibre.

En 1820, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart étudient les propriétés de la force subie par un des « pôles magnétiques » d'une l'aiguille aimantée et Pierre-Simon de Laplace (1742-1827) traduit cette loi par une formule qui porte le nom de Biot et Savart. Laplace a également déterminé la formule permettant de calculer la force exercée sur un fil parcouru par un courant électrique et baigné par un champ magnétique.

André-Marie Ampère (1775-1836), assimilant un solénoïde parcouru par un courant à un aimant, crée la théorie de l'électrodynamique.

C'est Faraday qui montre la possibilité de transformer le travail mécanique en énergie électrique en 1831. En 1833, Lenz établit la loi qui donne le sens du courant induit. Henry publie en 1832 un mémoire sur l'auto-induction.

En 1855, Foucault démontre l'existence des courants qui portent son nom.

En 1865, Maxwell publie son « traité d'électricité et de magnétisme », véritable fondement de l'électromagnétisme moderne, achevant l'œuvre d'Ampère.

En 1887, Hertz utilise un détecteur de sa construction pour montrer que ces ondes électromagnétiques ont des propriétés analogues à celles de la lumière, ouvrant ainsi la voix à la radio-électricité et, à partir de 1904, à l'électronique.

Les équations de Maxwell : toute l'électricité est là !

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

Electromagnétisme

Avertissement : dans ce polycopié, nous étudions l'électromagnétisme en nous limitant aux fondements de l'électrotechnique. Tout ce qui n'est pas utile en électrotechnique, comme l'outil mathématique à base d'opérateurs vectoriels (rotationnel, divergence, etc.) ou certains aspects théoriques (potentiel vecteur dont est issu B, etc.), sera éludé.

Lois fondamentales en électrotechnique

Les phénomènes qui interviennent en électrotechnique sont basés sur trois lois :

- la loi de Biot et Savart ou le théorème d'Ampère,
- l'expression de la force de Laplace (ou de Lorentz),
- la loi de l'induction de Faraday et de Lenz.

Les équations de Maxwell contiennent ces trois lois en faisant intervenir des opérateurs vectoriels assez complexes (divergence, rotationnel). Dans le domaine de l'électrotechnique, ces équations peuvent être envisagées plus simplement. En effet, d'une part les fréquences sont assez faibles (50 ou 60 Hz), d'autre part, il n'y a pas de champ électrostatique important, on peut donc négliger le "courant de déplacement" D.

Dans les paragraphes qui vont suivre, on verra apparaître le vecteur "excitation magnétique" \vec{H} et le vecteur "champ magnétique" \vec{B} . Le module du vecteur excitation magnétique ne dépend, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, que de la géométrie du fil conducteur du courant i et de l'intensité du courant électrique i . Le module du vecteur champ magnétique dépend à la fois de H et du milieu matériel dans lequel \vec{H} apparaît.

Un chapitre sera consacré à la différence entre les deux vecteurs. On peut dès à présent essayer de les distinguer au moyen d'une analogie. Envisageons un ressort spiral (ressort à boudin) que l'on comprime jusqu'à ce que les spires soient jointives. Si nous le laissons se détendre dans l'air, en relâchant très brusquement la pression exercée, le ressort retrouve sa forme initiale instantanément. Si, maintenant, nous le laissons se détendre, tout aussi brusquement, dans du miel assez visqueux, le ressort ne se détendra pas aussi rapidement que dans l'air. La cause de la détente, identique dans les deux cas (même coefficient de raideur, même écart initial entre les spires) peut être rapprochée de l'excitation magnétique \vec{H} . L'effet, la rapidité de l'expansion du ressort, qui dépend de la viscosité du matériau dans lequel a lieu la détente, peut être assimilée à \vec{B} .

En électrotechnique, les relations entre \vec{H} et \vec{B} sont simples.

Soit on considère comme matériau le vide ou l'air, alors :

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ (1.1) avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx \frac{1}{800000}$ SI perméabilité magnétique absolue du vide (ou de l'air).

Soit on considère des matériaux à base de fer (ferromagnétiques) et on a :

$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}$ (1.2) avec $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$, μ_r étant la perméabilité magnétique relative (au vide) du matériau considéré. Pour les matériaux ferromagnétiques, $2000 \leq \mu_r \leq 10000$.

Création de champs magnétiques par des aimants permanents

Les aimants permanents sont de formes diverses (barreaux, en U). Ils attirent toutes les substances ferreuses (limaille, clous, etc) par leurs extrémités, appelées pôles d'aimantation : pôles nord et sud. Deux pôles de même nom se repoussent, tandis que deux pôles de nom contraire s'attirent. Il est impossible d'isoler un pôle d'aimant en le brisant.

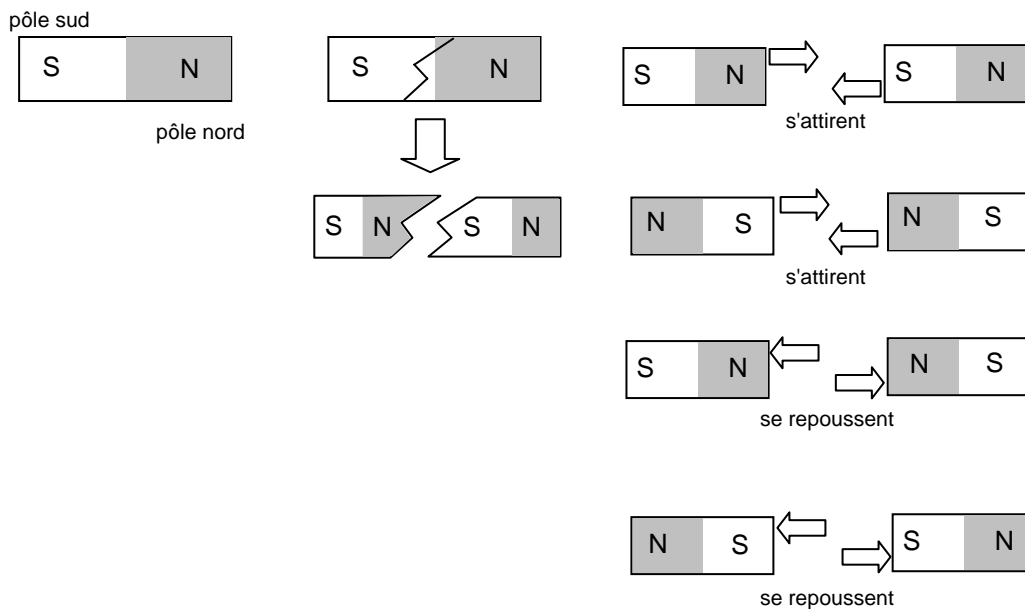


Figure 1

Les aimants créent un champ magnétique, représenté par un vecteur \vec{B} dont la direction et le sens en un point donné, sont définis comme suit :

- Direction : celle de l'axe d'une aiguille aimantée, Figure 2, (boussole) placée au point considéré.
- Sens : sens Sud – Nord de cette même aiguille.

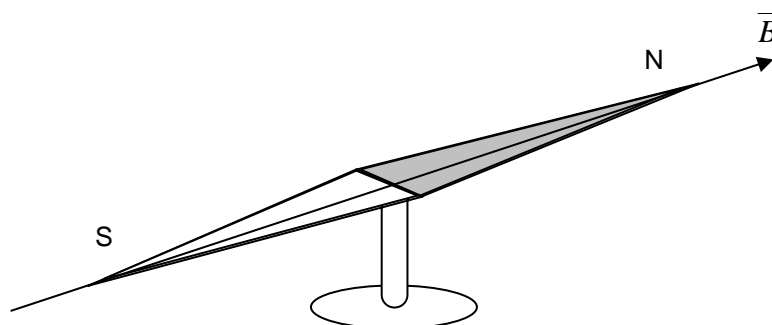


Figure 2

L'unité de champ magnétique est le Tesla (T).

Lignes de champ

Pour matérialiser le champ magnétique, on peut saupoudrer des grains de limaille de fer sur une feuille de papier placée au-dessus d'un aimant. La limaille se dispose suivant des courbes fermées appelées **lignes de champ**, tangentes en chacun de leurs points au vecteur champ magnétique et orientées dans le sens du champ. Il y en a une infinité.

Dans le cas d'un aimant, les lignes de champ sont orientées du pôle nord vers le pôle sud à l'extérieur de la matière aimantée. L'ensemble de ces lignes constitue un spectre magnétique. Il est à noter que sur la Terre, les lignes de champ sortent de ce que l'on nomme le pôle Sud géographique et que ce pôle correspond donc à un pôle nord magnétique.

Tube de champ

Dans l'espace, un faisceau de lignes de champ s'appuyant sur deux contours (C_1) et (C_2) forme un tube de champ (Figure 3).

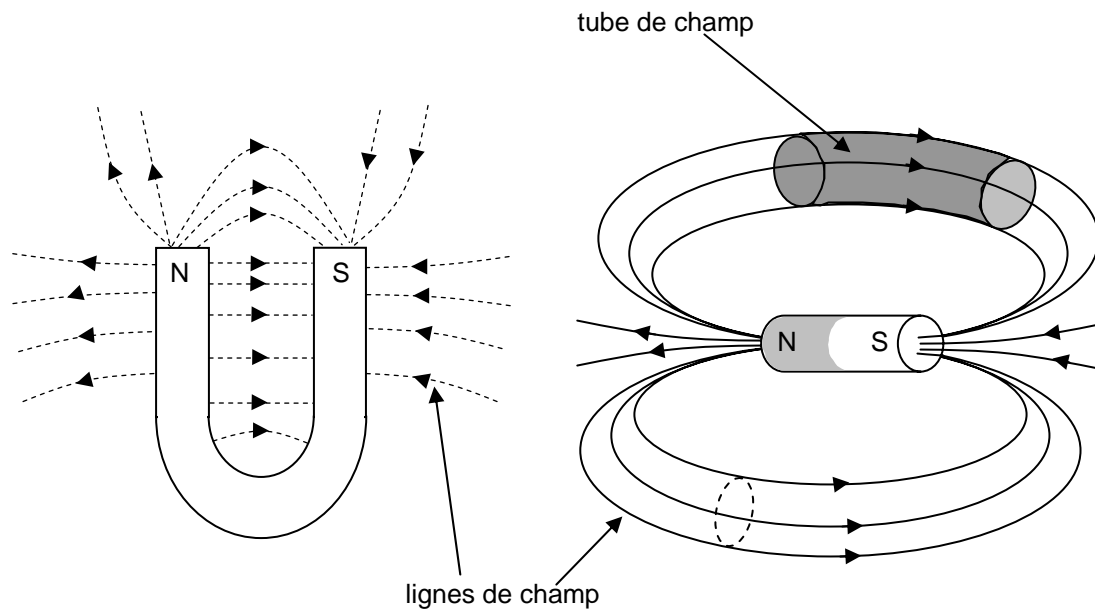


Figure 3

Création de champs magnétiques par des courants électriques

L'existence d'une excitation magnétique \vec{H} en un point donné de l'espace peut être due à la présence de matière aimantée ou bien à la circulation de courants électriques.

Formule de Biot et Savart

Hans Christian Oersted (1777-1851) découvre en 1819 qu'une aiguille aimantée est déviée à angle droit vers un courant électrique et établit ainsi la relation entre l'électricité et le magnétisme. C'est la découverte qui fonde l'électromagnétisme. A la suite de l'expérience d'Oersted, Jean Baptiste Biot et Félix Savart effectuent une étude quantitative des interactions entre aimants et courants au cours de l'année 1820, ce qui conduira à la loi de Biot et Savart formulée par Pierre Simon de Laplace.

Considérons (Figure 4) un circuit électrique (C) parcouru par un courant électrique i : la circulation de ce courant engendre l'apparition d'une excitation magnétique en tout point de l'espace. En un point M, situé à une distance r d'un élément de courant de longueur dl du circuit, ce vecteur excitation magnétique est défini par l'expression vectorielle :

$$\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \oint_C \overrightarrow{grad} \frac{1}{r} \wedge \overrightarrow{dl} \quad (1.3), \text{ expression à laquelle nous préférons la loi plus pratique :}$$

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{i \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{idl \sin \alpha}{r^2} \quad (1.4) \quad \alpha \text{ désigne l'angle entre l'élément de courant et la droite joignant}$$

cet élément au point M. \vec{H} s'exprime en A/m.

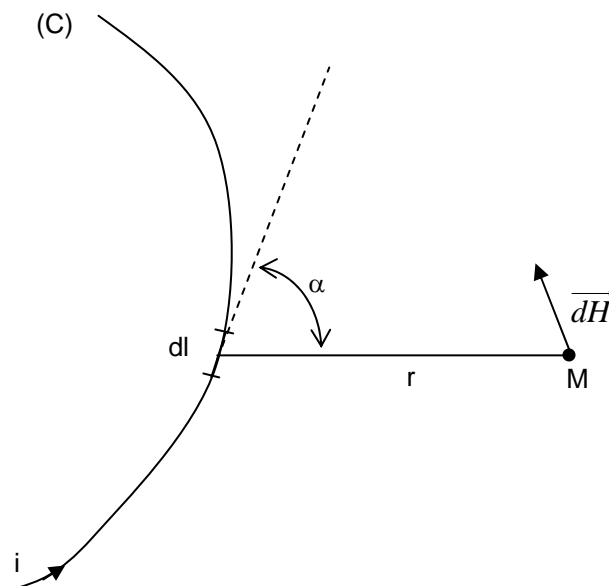
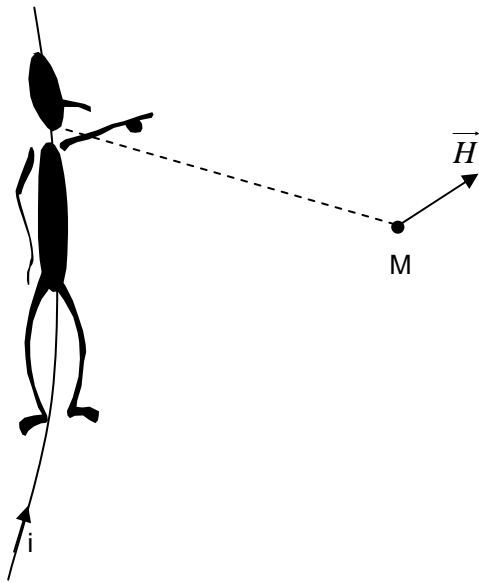


Figure 4
Formule de Biot et Savart (C n'est pas forcément contenue dans le plan de la page)

Règle de l'observateur d'Ampère donnant le sens de \vec{H} (Figure 5):



L'observateur est installé le long du circuit électrique de telle manière que le courant lui rentre par les pieds et lui sorte par la tête. L'observateur regarde le point M et tend le bras gauche, le vecteur excitation magnétique est dirigé dans le sens du bras gauche.

On peut tout aussi bien "effectuer" le produit vectoriel en tournant le "tire bouchon de Maxwell" dans le sens du repliement du vecteur $i d\vec{l}$ sur le vecteur \vec{r} . Le tire bouchon progresse dans le sens du vecteur \vec{H} .

Figure 5
Observateur de Laplace

Exemples de calcul de champ magnétique :

Champ créé par un segment de fil électrique parcouru par un courant I :

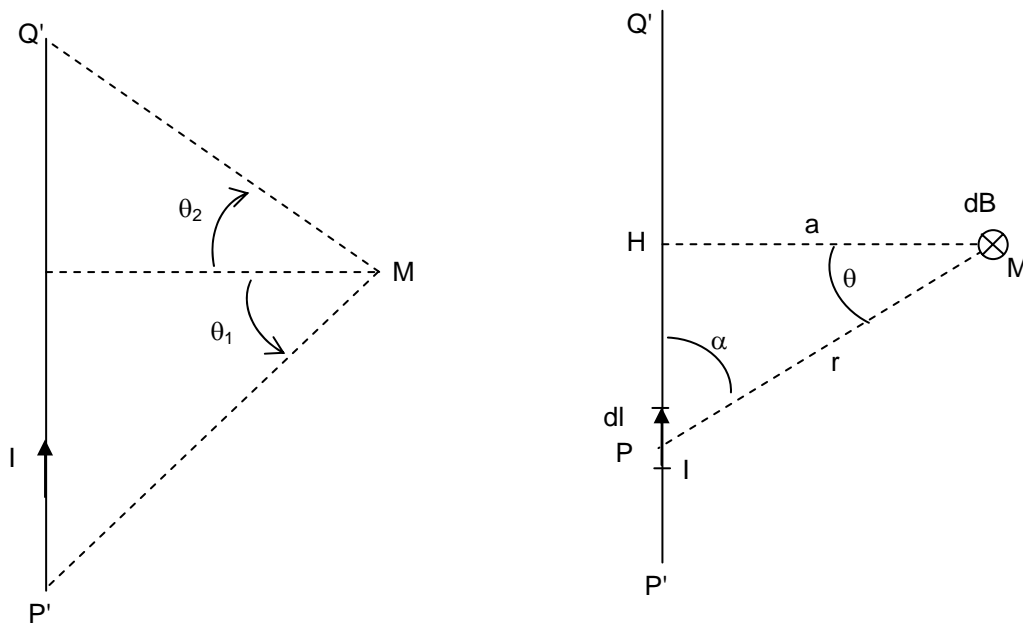


Figure 6
H créée par un fil

On oriente les angles θ_1 et θ_2 par le sens du courant I (Figure 6). Dans le cas de la figure ci-dessus, θ_1 est négatif et θ_2 est positif.

Soit un élément de longueur $d\vec{l}$, celui-ci crée en M un champ élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ en posant } \overrightarrow{PM} = \vec{r}$$

Le vecteur $d\vec{B}$ sera perpendiculaire au plan formé par $d\vec{l}$ et M et orienté dans le cas ci-contre vers l'arrière.

Tous les vecteurs \vec{dB} créés par tous les éléments \vec{dl} en lesquels on peut décomposer le segment P'Q' seront colinéaires et de même sens.

Le module B du champ résultant sera donc :

$$B = \int_{P'Q'} dB \text{ or } dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \alpha}{r^2}$$

Posons HP = l. On a $\frac{l}{a} = \tan \theta$ donc $dl = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$

D'autre part $\sin \alpha = \cos \theta$ et $r = \frac{a}{\cos \theta}$

En reportant dans dB, il vient :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

En intégrant sur le segment, il vient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

Donc : $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$

Si le fil possède une longueur infinie :

$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ donc : $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ (1.5)

Champ magnétique sur l'axe d'une spire de rayon R à la distance x du centre de celle-ci créé par un courant d'intensité I :

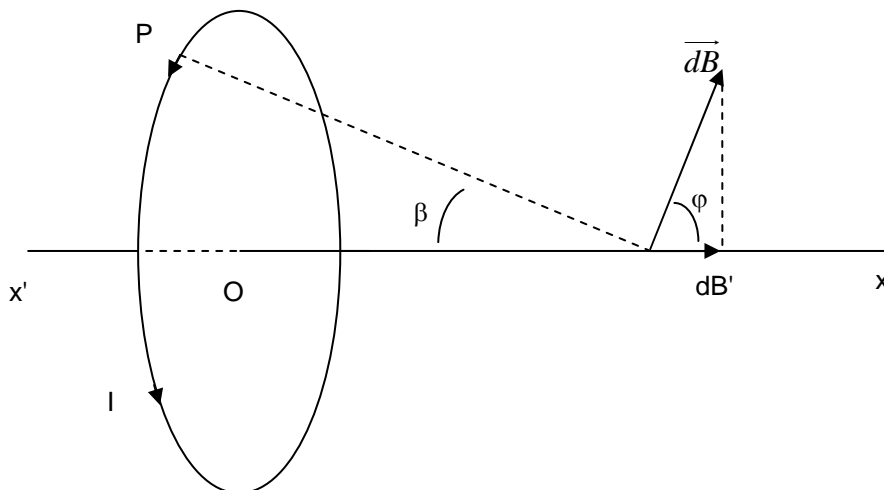


Figure 7
H créée par une spire sur un point de son axe

Soit un élément de longueur \vec{dl} de la spire centré en P (Figure 7). En M, cet élément crée un champ élémentaire \vec{dB} perpendiculaire à PM, orienté comme sur la figure ci-dessus, de module :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2} \text{ avec } r = PM \text{ et } \theta = (\vec{dl}, \vec{PM}).$$

Or $\theta = \frac{\pi}{2}$ quel que soit l'élément dl et $r = \text{constante}$. Par raison de symétrie, le champ résultant B sera porté par l'axe $x' O x$.
La composante utile de dB sera donc :

$$dB' = dB \times \cos \varphi \text{ or } \varphi = \frac{\pi}{2} - \beta, \text{ donc } dB' = dB \times \sin \beta.$$

Pour tous les éléments dl , β est le même.

$$\text{Donc : } dB' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \beta \cdot dl$$

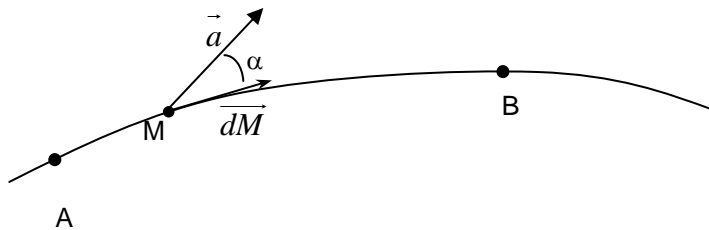
L'intégration de dB' sur toute la spire donne le module du champ résultant B .

$$\text{Donc : } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \beta \cdot 2\pi R \text{ or } \sin \beta = \frac{R}{r}$$

$$\text{Donc : } B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta \text{ ou en fonction de } x : B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.6)$$

Complément mathématique : intégrale vectorielle ou circulation d'un vecteur

Soit un arc AB sur une courbe C parcouru par un point M dans un certain sens. Soit \vec{a} un vecteur fonction du point.



On appelle circulation du vecteur \vec{a} le long de l'arc AB la valeur de l'intégrale curviligne $\int_A^B \vec{a} \cdot \overline{dM}$ (intégrale curviligne d'un produit scalaire).

\overline{dM} est le vecteur tangent à la courbe C au point M .

$\vec{a} \cdot \overline{dM} = a \cdot dM \cdot \cos \alpha$ avec α angle entre \vec{a} et \overline{dM} . Dans le cas général α varie suivant M .

Si \vec{a} est une force, la circulation de cette force le long de l'arc AB est le travail de cette force.

On note $\oint \vec{a} \cdot \overline{dM}$ la circulation du vecteur \vec{a} suivant un contour fermé.

Théorème d'Ampère

L'équation de Maxwell : $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ se simplifie dans le domaine de l'électrotechnique où l'on peut négliger le courant de déplacement \vec{D} . Ainsi, cette équation devient : $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$.

Une intégration de cette relation conduit à la relation suivante, qui constitue le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = ni \quad (1.7)$$

La circulation du vecteur excitation magnétique \vec{H} le long d'une ligne d'induction Γ fermée entourant un circuit C parcouru par un courant i est égale au produit du courant i par le nombre de fois que cette ligne Γ traverse le circuit C.

Ou encore : la circulation du vecteur excitation magnétique le long d'un contour fermé est égal à la somme algébrique des intensités électriques traversant une surface quelconque supportée par ce contour.

L'intérêt de ce théorème, en électrotechnique, provient du fait que, très souvent, la ligne d'induction Γ est évidente.

Il est également à remarquer que le nombre de fois que la ligne Γ traverse le circuit C est égal au nombre de fois que le circuit C entoure la ligne Γ . Dans les cas pratiques, il s'agira du nombre de spires du circuit C.

La quantité qui intervient au second membre s'appelle la "force magnétomotrice" du circuit :

f.m.m. = $ni = F$ en unité SI, une f.m.m. se mesure en "ampère-tour", symbole At, ou plus simplement en ampère A.

Considérons la Figure 8 et cherchons à appliquer le théorème d'Ampère au contour Γ . La question qui se pose immédiatement est la détermination du signe des intensités i_1 , i_2 , et i_3 .

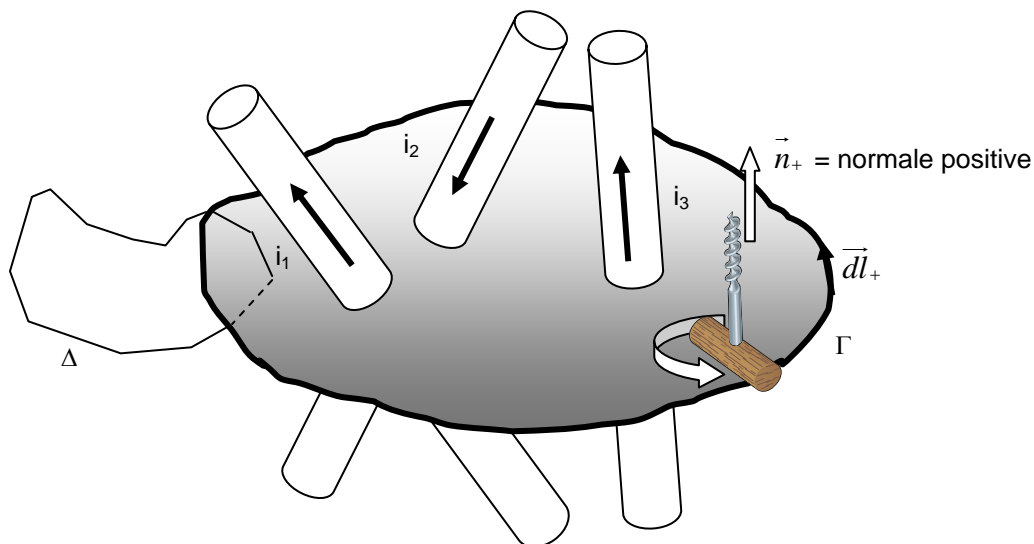


Figure 8
Illustration du théorème d'Ampère

Dans la suite de cet ouvrage, nous définirons comme normale positive à une surface la normale obtenue par la règle du tire bouchon de Maxwell : on tourne le tire bouchon suivant le sens positif défini sur Γ , il s'enfonce dans le sens de la normale positive. Le signe d'une intensité est positif si l'intensité est dans le sens de la normale positive, négatifs sinon.

Ainsi, l'application du théorème d'Ampère à la courbe Γ de la Figure 8 donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_1 - i_2 + i_3$$

L'application du théorème d'Ampère à la courbe Δ , qui n'entoure aucun courant donne : $\oint_{\Delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$

Exemple d'application du théorème d'Ampère :

Excitation magnétique créée par un fil de longueur infini

Considérons un fil électrique de longueur infinie perpendiculaire au plan de cette feuille de papier. Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil. Il est ainsi facile de déterminer la valeur de H sur une ligne d'induction de rayon a.

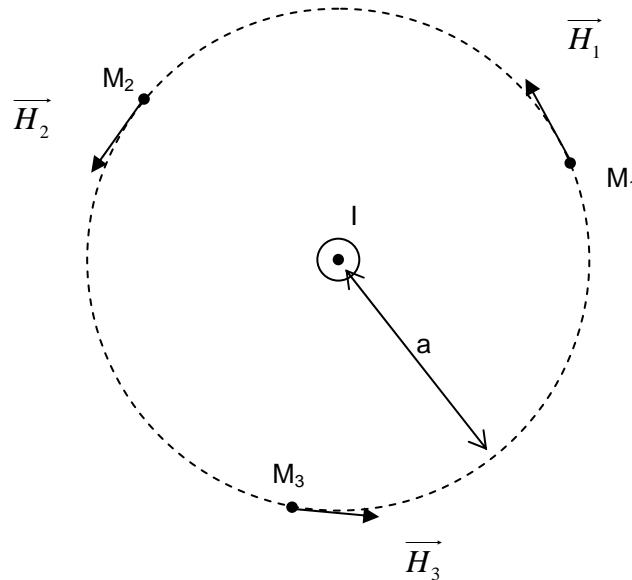


Figure 9
H créée par un fil sur son axe obtenue par le théorème d'Ampère

Le vecteur H possède un module constant sur la ligne d'induction de la Figure 9. En effet, la formule de Biot et Savart $dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$ indique que, si r est constant, alors H reste constant en module.

On a donc, en prenant comme courbe Γ une ligne d'induction :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \int_{\Gamma} d\vec{l} = H \cdot 2\pi a = I \Rightarrow \boxed{H = \frac{I}{2\pi a}}$$

La direction et le sens de \vec{H} sont donné par Biot et Savart : $\vec{Idl} \wedge \vec{r}$.

Excitation magnétique créée dans un solénoïde torique

Considérons un bobinage régulier de n spires du type "toroïdal", (Figure 10) réalisé sur un noyau en forme de tore et de nature quelconque. Pour calculer l'excitation magnétique en un point M du noyau, il est évident que l'application de la relation de Biot et Savart serait longue et fastidieuse. Par contre, le théorème d'Ampère donne immédiatement la solution si on choisit comme ligne d'induction Γ la ligne moyenne du tore (en supposant le matériau homogène et isotrope, on peut faire sortir H de sous le signe \oint):

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \oint_{\Gamma} dl = H \times 2\pi R = ni \Rightarrow H = \frac{ni}{2\pi R} \quad (1.8)$$

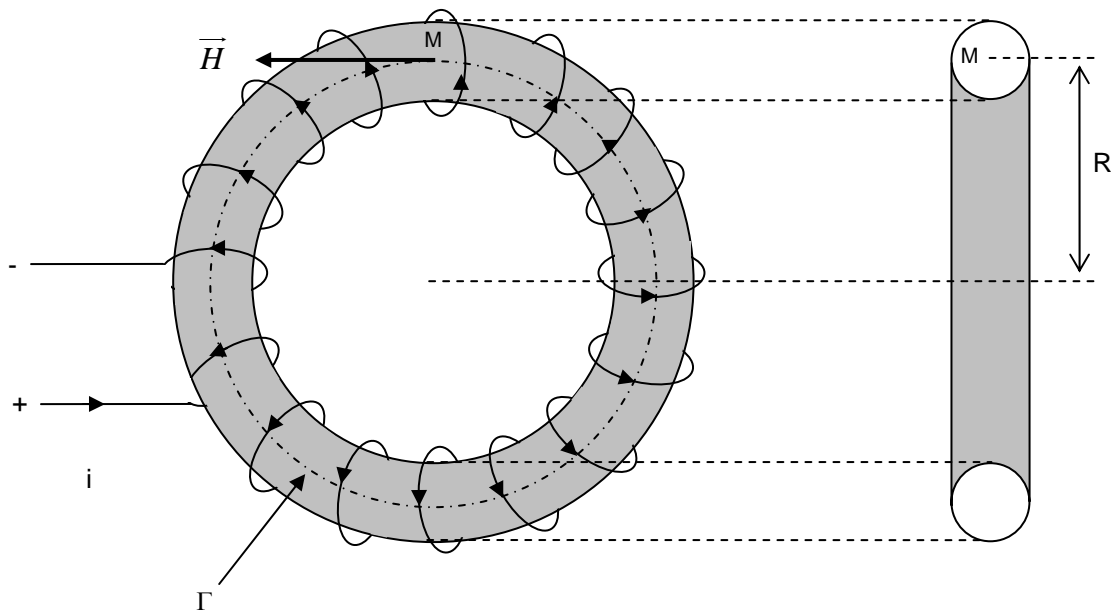


Figure 10
H à l'intérieur de spires enroulées sur un tore

Excitation magnétique créée dans un solénoïde cylindrique rectiligne de longueur infini

Considérons un bobinage régulier de n spires du type solénoïde cylindrique rectiligne (Figure 11). La forme de la section, circulaire, carrée, ellipsoïdale, importe peu. Le solénoïde porte n spires par unité de longueur. En pratique, dès que la longueur du solénoïde est suffisante pour que l'excitation magnétique à l'extérieur soit très faible par rapport à celle régnant à l'intérieur (10 fois moins), on peut appliquer la formule que nous allons établir.

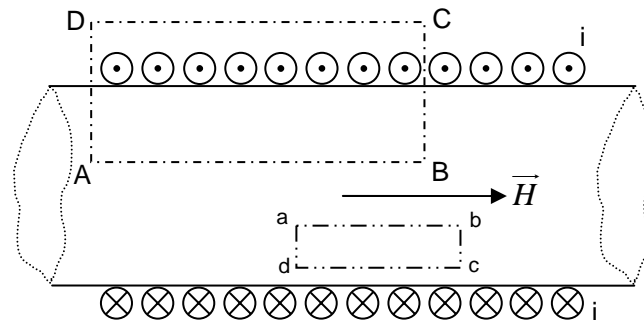


Figure 11
H créé par un solénoïde rectiligne infini

Les lignes de champ \vec{H} sont toutes parallèles à l'axe du solénoïde. Ce résultat est obtenu expérimentalement en observant la disposition de limaille de fer sur des feuilles placées à l'intérieur du tube ou encore en plongeant le solénoïde dans de l'huile contenant des particules de limaille de fer

On considère que le module de \vec{H} est constant sur une ligne de champ (une droite parallèle à l'axe du tube).

Montrons tout d'abord que H est uniforme à l'intérieur du solénoïde :

On peut légitimement se demander si H possède un module constant à l'intérieur du solénoïde, quelle que soit sa distance à l'axe. Si le module de H varie en fonction de sa distance à l'axe, la contribution du trajet AB ne sera pas aussi simple !

Pour répondre à cette question, considérons le contour abcd situé à l'intérieur du solénoïde et supposons que le module du vecteur \vec{H} soit variable en fonction de la distance du point où l'on considère H à l'axe.

$$\oint_{abcd} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{H}_{ab} \cdot d\vec{l} + \int_{bc} \vec{H}_{bc} \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{H}_{cd} \cdot d\vec{l} + \int_{da} \vec{H}_{da} \cdot d\vec{l}$$

Sur les trajets bc et da, \vec{H} est en tout point perpendiculaire à $d\vec{l}$, le produit scalaire est en tout point égal à 0. Peu importe que \vec{H} soit variable sur ces trajets, les contributions des trajets bc et da à l'intégrale sont nulles.

Il reste :

$$\oint_{abcd} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{H}_{ab} \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{H}_{cd} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{H}_{ab} \cdot d\vec{l} - \int_{dc} \vec{H}_{cd} \cdot d\vec{l} = H_{ab} \times ab - H_{cd} \times dc = ab \times (H_{ab} - H_{cd})$$

Cette intégrale est égale au nombre de fois où l'intensité i est entourée, c'est-à-dire 0 pour ce contour.

$$ab \times (H_{ab} - H_{cd}) = 0 \times i \Rightarrow \boxed{H_{ab} = H_{cd}}$$

Ainsi, à l'intérieur d'un solénoïde de longueur suffisante, le vecteur excitation magnétique est uniforme.

Calculons la valeur de l'excitation magnétique à l'intérieur du solénoïde.

Pour cela, envisageons le contour ABCD (Figure 11) auquel nous appliquerons le théorème d'Ampère :

Il n'y a pas lieu de distinguer \vec{H} suivant la position considérée à l'intérieur du solénoïde puisque sa valeur est identique en tout point du solénoïde, on peut donc écrire :

$$\oint_{ABCD} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{AB} \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_{BC} \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_{CD} \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_{DA} \vec{H} \cdot \vec{dl}$$

$$\oint_{ABCD} \vec{H} \cdot \vec{dl} = H \cdot AB + H \cdot BC \cdot \cos(90^\circ) + 0 \cdot CD + H \cdot DA \cdot \cos(90^\circ)$$

Valeur de l'intégrale sur les trajets perpendiculaires à l'axe du solénoïde BC et DA :

A l'intérieur du solénoïde, H est non nulle mais perpendiculaire au trajet, donc le produit scalaire est nul.

De plus, on considère que H est nulle à l'extérieur du solénoïde (infinitement faible en fait). Donc, les contributions des trajets BC et DA à l'intégrale sont nulles.

Sur le trajet CD, on considère, là aussi, que H est nulle, donc la contribution du trajet CD à l'intégrale est nulle.

Sur le trajet AB, \vec{H} est parallèle à l'axe du solénoïde, on a $\oint_{ABCD} \vec{H} \cdot \vec{dl} = H \times AB$.

En définitive, en appelant N_{AB} le nombre de fois que le fil du solénoïde traverse le rectangle ABCD :

$$\oint_{ABCD} \vec{H} \cdot \vec{dl} = H \times AB = N_{AB} \cdot i \Rightarrow \boxed{H = ni} \quad (1.9) \quad \text{avec } n = \frac{N_{AB}}{AB} \text{ densité linéique de fils}$$

Excitation magnétique créée dans un circuit magnétique de transformateur

L'application correcte du théorème d'Ampère et sa généralisation au cas où plusieurs circuits électriques agissent en même temps pour créer un champ, implique de bien préciser les sens des courants et la façon dont la ligne d'induction Γ traverse ces courants.

Considérons, par exemple, le bobinage de transformateur de la Figure 12.

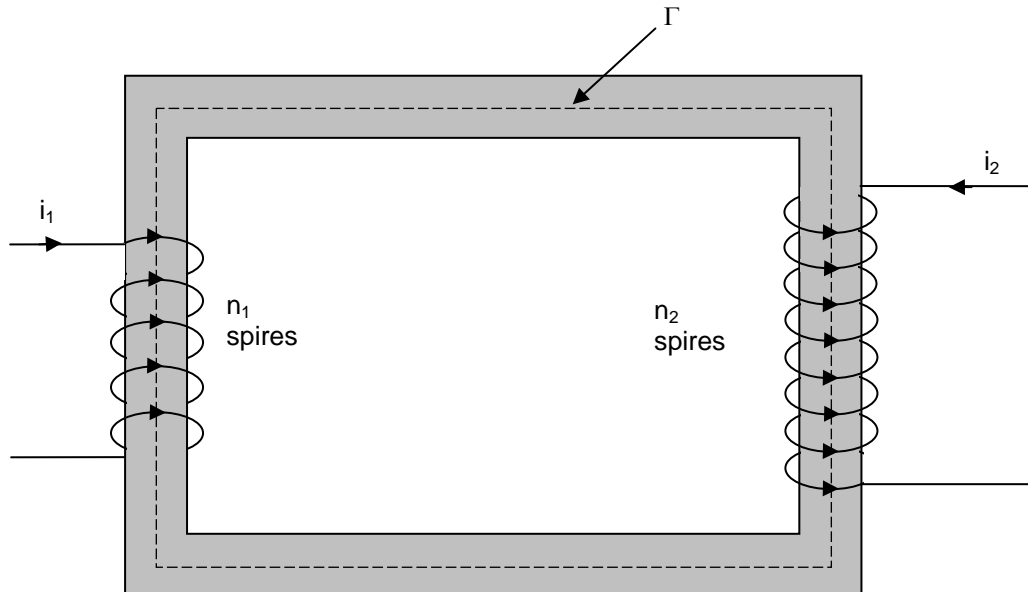


Figure 12
H créée dans un circuit magnétique de transformateur

Algébrisons le circuit de la Figure 12 en définissant un sens positif sur Γ : le sens des aiguilles d'une montre par exemple.

Les courants seront comptés positivement d'après la règle du tire bouchon de Maxwell : si le tire bouchon, que l'on tourne dans le sens de rotation de l'intensité, s'enfonce suivant le sens positif sur Γ , alors l'intensité est comptée positivement, négativement sinon.

On a ainsi :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{dl} = n_1 i_1 - n_2 i_2 = H \cdot l \quad (\text{avec } l \text{ longueur de la ligne d'induction moyenne})$$

Si le noyau est homogène, H est la même partout, et on peut écrire :

$$\boxed{H \cdot l = n_1 i_1 - n_2 i_2} \quad (1.10)$$

Force exercée par une induction magnétique sur un courant

Un champ magnétique \vec{B} exerce une force sur toute charge animée d'une vitesse par rapport à ce champ. Etant donné qu'un courant électrique est une circulation de charges électriques (électrons se déplaçant), un champ magnétique exerce une force sur un élément de courant dl .

En électrotechnique, nous supposons négligeable le champ électrique \vec{E} et nous ne tiendrons pas compte de la contribution $q\vec{E}$ présente dans l'expression de la force de Lorentz donnant la force créée par un champ magnétique sur une charge en mouvement relatif par rapport à ce champ :

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right] \text{ (avec } v : \text{ vitesse des charges)}$$

Dans l'expression de la force de Lorentz, en considérant la circulation d'un courant électrique i pendant le temps dt , on peut remplacer la charge électrique dq par idt ($dq = idt$) et la vitesse par $v = \frac{dl}{dt}$.

La force élémentaire $d\vec{F}$ exercée sur l'élément dl par un champ \vec{B} uniforme vaut donc :

$$d\vec{F} = idt \frac{d\vec{l}}{dt} \wedge \vec{B} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

On obtient ainsi l'expression de la force de Laplace :

$$\boxed{d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}} \quad (1.11)$$

Si le fil est rectiligne, de longueur l et que le champ \vec{B} est perpendiculaire au fil, le module de la force a pour valeur :

$$F = Bil$$

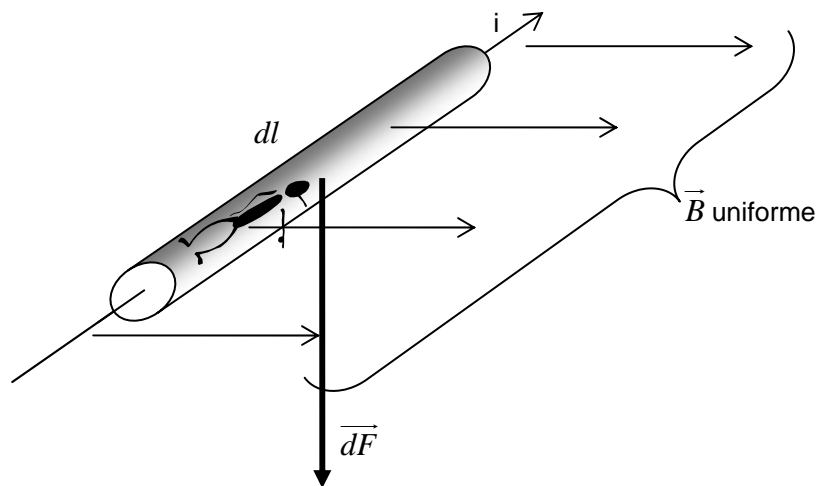


Figure 13
Force de Laplace

Le sens de la force de Laplace est tel que pour un observateur installé dans le sens du courant et regardant dans le sens de l'induction, la force est dirigée vers sa gauche.

Une autre règle très utile pour la détermination de la direction et du sens de la force de Laplace est la règle dite "des trois doigts de la main droite" où le pouce, l'index et le majeur sont placés de manière à former un trièdre rectangle comme l'indique la Figure 14.

D'autres dispositions des doigts sont possibles par permutation circulaire. Néanmoins celle-ci permet une meilleure mémorisation. En effet, lors de la détermination de la f.é.m. induite dans un conducteur que l'on déplace dans un champ \vec{B} , on se sert de la main gauche avec le pouce qui représente toujours le champ et le majeur qui représente toujours le courant, l'index de la main gauche représentant la vitesse de déplacement du conducteur. Les pouces représentent le champ et les majeurs le courant.

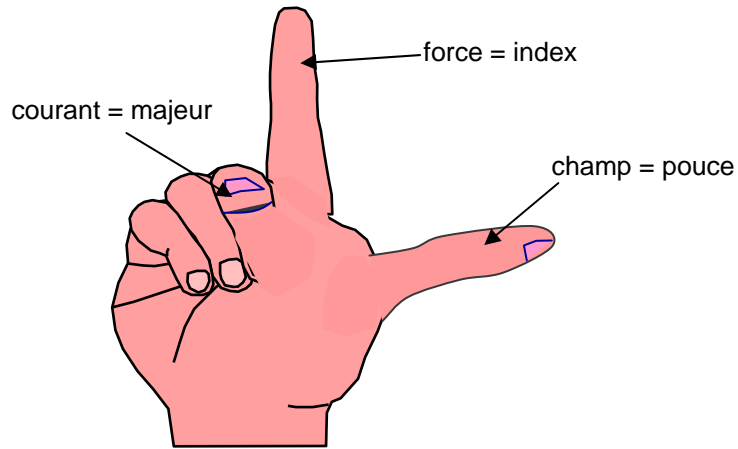


Figure 14
Règle des trois doigts de la main droite

Forces exercées entre deux courants rectilignes parallèles

Considérons deux fils rectilignes situés à une distance a l'un de l'autre, parcourus par des courants i_1 et i_2 ayant les sens indiqués Figure 15. Le courant i_1 crée une excitation magnétique \vec{H}_1 en tout point de l'espace et en particulier au voisinage d'un élément dl du courant i_2 .

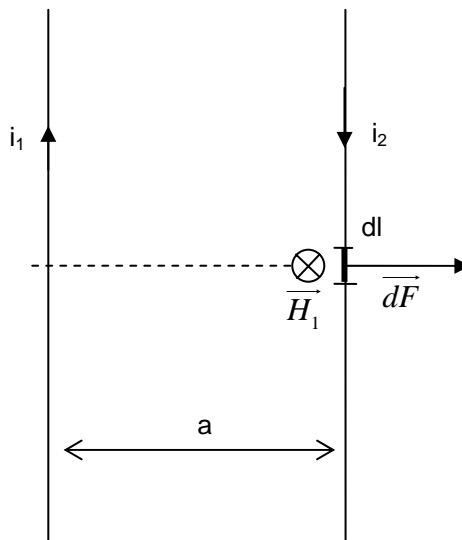


Figure 15
Force de Laplace entre deux courants

Nous avons établi l'expression de l'excitation magnétique créée par un fil de longueur infini :

$$H_1 = \frac{i_1}{2\pi a} \text{ dans le sens indiqué Figure 15.}$$

A cette excitation magnétique H_1 , correspond une induction B_1 qui vaut, en désignant par μ la perméabilité magnétique du milieu dans lequel sont les fils :

$$B_1 = \mu H_1 = \mu \frac{i_1}{2\pi a}$$

Ce champ exerce sur l'élément dl parcouru par le courant i_2 une force dirigée dans le sens indiqué Figure 15:

$$dF = i_2 dl \cdot B_1 = i_2 \cdot \frac{\mu i_1}{2\pi a} \cdot dl$$

Ainsi, la force d'interaction par unité de longueur vaut :

$$\frac{dF}{dl} = \mu \cdot \frac{i_1 \cdot i_2}{2\pi a}$$

Cette force est attractive si les courants sont de même sens et répulsive si les courants sont de sens opposés. L'existence de cette force montre que les deux fils peuvent réaliser une conversion d'énergie électromécanique si on les laisse libre de se mouvoir.

Flux magnétique

Le flux magnétique est une quantité importante qui intervient constamment dans l'étude des machines électriques. C'est une grandeur scalaire qui se prête mieux aux calculs que le champ magnétique, grandeur vectorielle.

Le flux magnétique Φ à travers une surface quelconque S est défini par la formule :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_S B \cdot \cos \alpha \cdot dS \quad (1.12), \Phi \text{ est exprimé en Weber.}$$

α est l'angle entre la normale et le champ \vec{B} , \vec{n} est la normale (unitaire) à la surface dS . Son orientation est liée au sens positif choisi sur la courbe sur laquelle s'appuie la surface comme le montre la Figure 16. Définissons arbitrairement un sens positif de parcours du contour Γ sur laquelle s'appuie la surface. La règle du tire bouchon de Maxwell permet de définir une normale positive à la surface (le tire bouchon que l'on tourne dans le sens positif choisi progresse selon la normale positive).

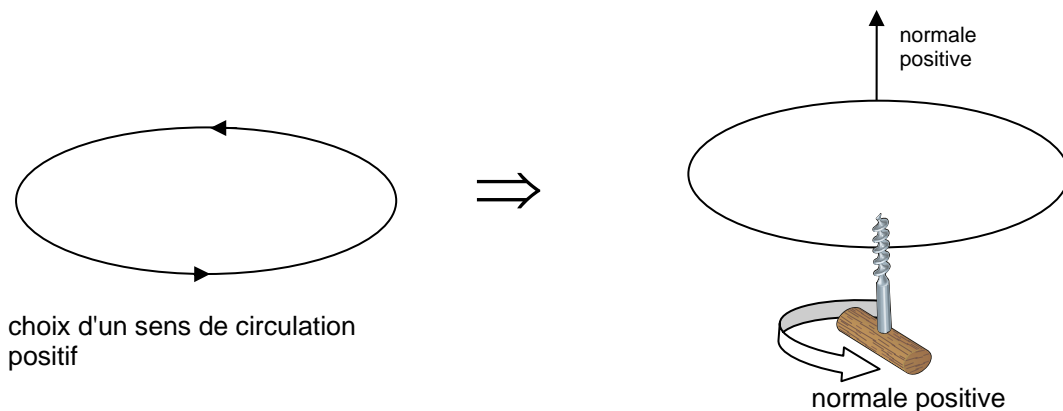


Figure 16
Définition de la normale positive à une surface

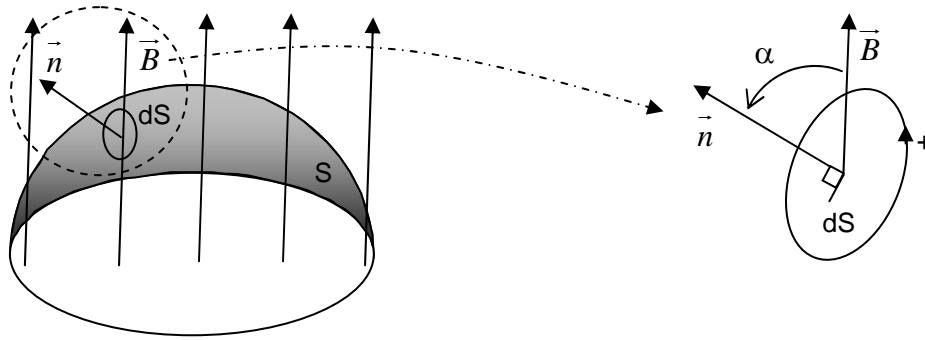


Figure 17
Flux magnétique

Lorsque le champ \vec{B} est uniforme (il est identique en tout point d'un volume) et qu'il traverse une surface plane S , alors :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = BS \cos \alpha \quad (1.13)$$

Si la surface est perpendiculaire aux lignes de champ ($\alpha = 0$), l'expression devient :

$$\Phi = BS$$

La quatrième équation de Maxwell : $\text{div} \vec{B} = 0$ indique que le flux du vecteur champ magnétique à travers une surface fermée est nul. En électrotechnique, les lignes de champ \vec{B} n'émanent pas de sources ponctuelles.

Il n'y a pas de monopôle magnétique en électrotechnique. Certaines théories physiques impliquent l'existence de tels objets. L'existence des monopôles magnétiques n'est toujours pas prouvée, mais, même s'ils existaient, cela ne modifierait pas l'électrotechnique pour laquelle : $\text{div} \vec{B} = 0$.

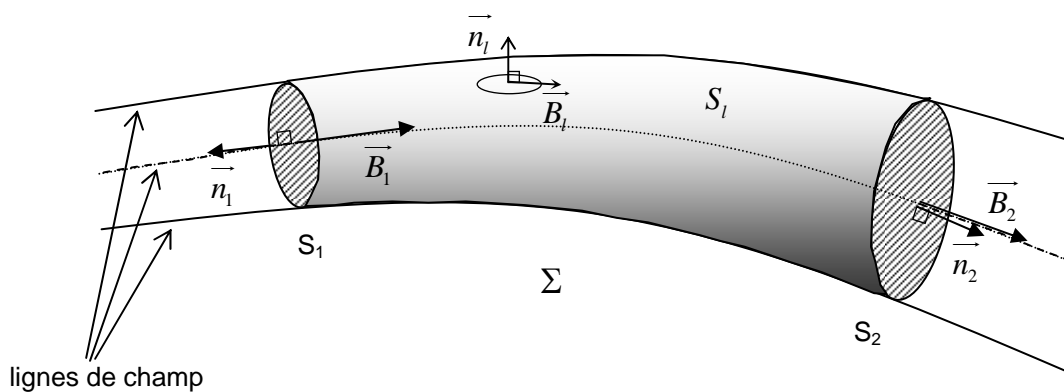


Figure 18

Soit la surface de la Figure 18 : Σ , formée par la surface latérale S_1 d'un tube de champ (surface formée d'un ensemble de lignes de champ) et de deux sections droites (perpendiculaires aux lignes de champ) S_1 et S_2 .

Le flux magnétique sortant de Σ est nul (en orientant les normales vers l'extérieur) :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \underbrace{\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1}_{=0} dS_1 + \iint_{S_1} \underbrace{\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1}_{=-B_1} dS_1 + \iint_{S_2} \underbrace{\vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2}_{=B_2} dS_2 = 0$$

$$\Rightarrow -B_1 S_1 + B_2 S_2 = 0 \Rightarrow -\Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Le signe – devant Φ_1 indique qu'il s'agit d'un flux entrant.

Le long d'un tube de champ, le flux magnétique se conserve, il ne dépend que du contour et non de la surface considérée : $\Phi_1 = B_1 S_1 = B_2 S_2 = \Phi_2$.

Cette propriété peut être exploitée pour créer des champs B très intenses (2500 T). En effet, on ne sait pas créer de champ B continu dans le temps supérieur à environ 40 Tesla. Pour générer des champs beaucoup plus intenses, on décharge des condensateurs dans un solénoïde tout en diminuant brusquement la section de celui-ci en le faisant imploser à l'aide d'explosifs judicieusement placés autour. Le flux, comme la charge électrique portée par les armatures d'un condensateur, est une grandeur qui ne varie pas instantanément. Ainsi, si la surface tend vers 0, le champ B peut atteindre des valeurs très élevées pendant un très court intervalle de temps, voire la Figure 19.

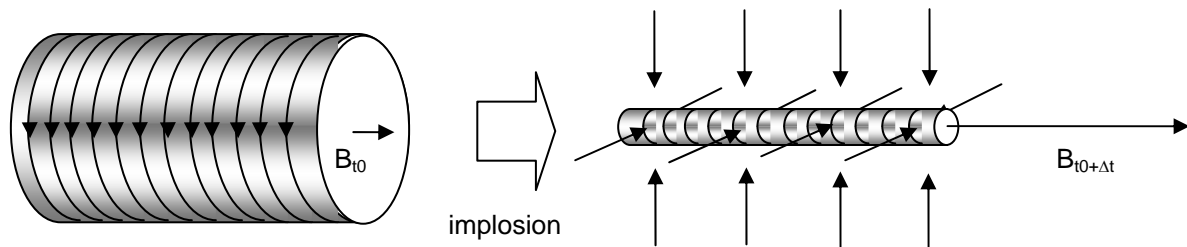


Figure 19
Production de champ B très intense (2500 T)

Différence de potentiel électrique induite dans un circuit par une variation de flux magnétique

Tout circuit électrique traversé par un flux magnétique peut être le siège d'une d.d.p. à ses bornes si ce flux varie en fonction du temps. Cette d.d.p. s'appelle une f.é.m. induite.

Lois de Faraday et de Lenz

Sous sa forme générale, la loi de Faraday donne la valeur du champ électrique \vec{E} induit par une variation du champ magnétique \vec{B} :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dans le domaine de l'électrotechnique où on considère des circuits filiforme bobinés, l'expression ci-dessus peut se simplifier :

$e = -n \frac{d\Phi}{dt}$ (1.14), la f.é.m. aux bornes d'un circuit comportant n spires (bobinées en série) est égale à n

fois la dérivée par rapport au temps du flux (du champ \vec{B}) qui traverse chaque spire du circuit (on considère que chaque spire est traversée par un même flux, celui-ci ne varie pas en fonction des spires). Si le flux est indépendant du temps, il n'apparaît aucune f.é.m. aux bornes du circuit.

On met quelque fois un signe - dans la formule pour rappeler que la f.é.m. induite s'oppose à la cause qui lui donne naissance. Cette opposition est précisée par la loi de Lenz :

La f.é.m. induite tend à créer un courant induit dont le sens est tel qu'il s'oppose au flux qui l'a fait naître.

Les deux lois précédentes sont très générales et sont valables quelle que soit la forme du circuit et la façon dont le flux varie :

- Lorsque les variations de flux sont dues à un mouvement (ou à une déformation du circuit, il s'agit d'un flux "coupé" par le circuit et la f.é.m. s'appelle "f.é.m. de vitesse". C'est le cas pour la f.é.m. qui apparaît aux bornes d'un fil rigide que l'on déplace dans une induction uniforme.
- Lorsque les variations de flux sont dues à une variation de l'induction (c'est-à-dire du courant qui crée cette induction), il s'agit d'un flux "embrassé" et la f.é.m. correspondante est appelée "f.é.m. de transformation".

f.é.m. de "vitesse" produite par une variation de flux "coupé"

Exemple 1

Considérons un fil de longueur l se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans une induction constante \vec{B} (Figure 20).

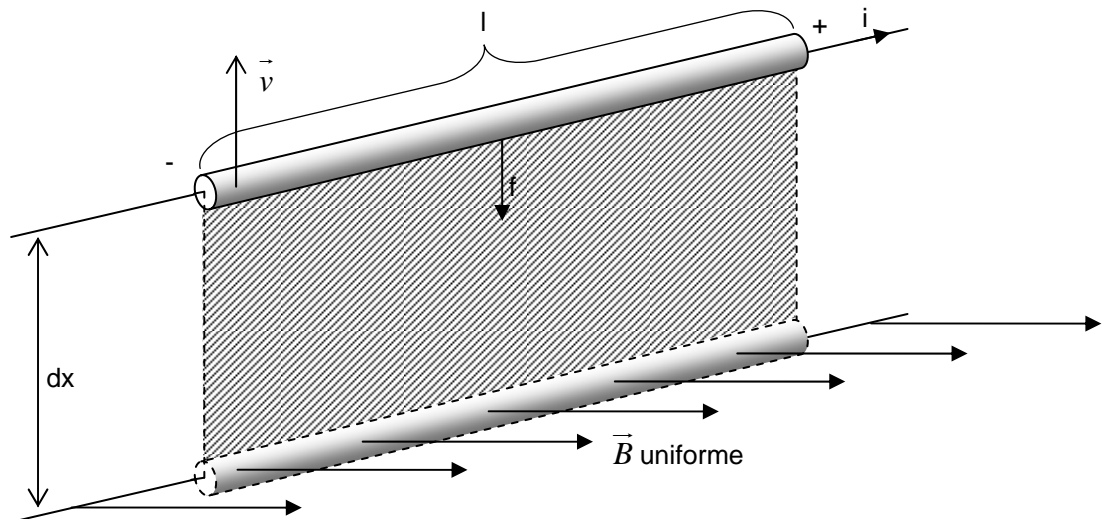


Figure 20
F.é.m. de vitesse

Pendant le déplacement élémentaire dx, le fil "coupe" un flux élémentaire :

$$d\Phi = B \cdot dS = B \cdot l \cdot dx$$

Il apparaîtra donc à ses bornes une f.é.m. de valeur :

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot v$$

Lorsque \vec{B} , \vec{v} et l ont des directions quelconques, cette relation se généralise en un produit mixte :

$$e = \vec{l} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{v} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{l}) = \vec{B} \cdot (\vec{l} \wedge \vec{v})$$

En désignant par α l'angle entre \vec{v} (direction du déplacement) et \vec{l} (direction du fil) et par θ l'angle entre \vec{B} et une perpendiculaire au plan défini par \vec{v} et \vec{l} , le module de la f.é.m. vaut :

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta$$

Lorsque le fil se déplace avec une vitesse \vec{v} perpendiculaire à sa direction \vec{l} (soit $\alpha = 90^\circ$ et $\sin \alpha = 1$), on a :

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \cos \theta$$

On peut alors introduire la composante normale de l'induction, c'est-à-dire la composante de \vec{B} sur une perpendiculaire au plan de \vec{v} et de \vec{l} :

$$B_n = B \cdot \cos \alpha \text{ d'où } e = B_n \cdot l \cdot v$$

La polarité de e est telle que le courant induit s'oppose à la cause qui le produit.

Première interprétation : On peut considérer que c'est le flux coupé qui produit e . Pour s'opposer au flux, i doit produire un flux (du à un champ induit) antagoniste au flux du champ \vec{B} .

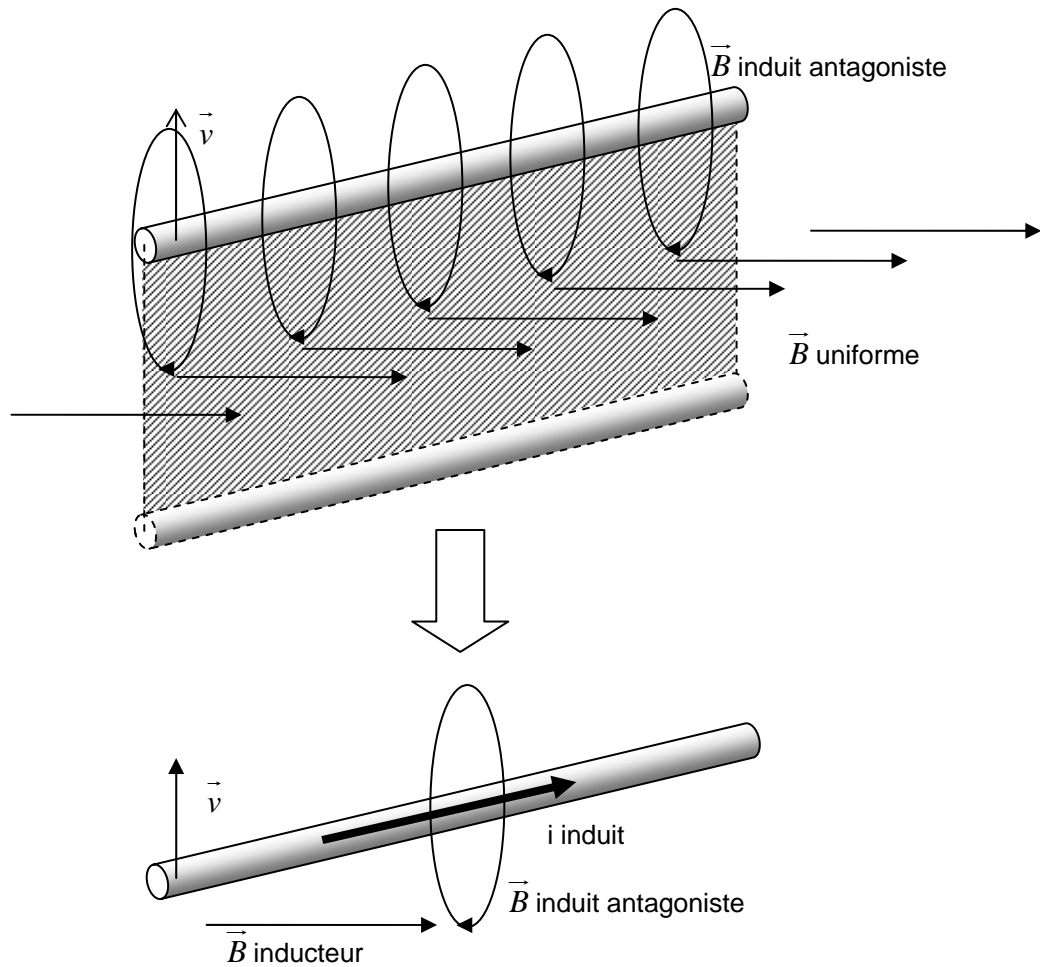


Figure 21
Sens du courant induit, opposition au flux inducteur

Nous appellerons **champ inducteur** le champ magnétique extérieur qui préexiste et qui baigne le fil en mouvement. Nous appellerons champ induit le champ magnétique créé par le courant induit du à $e = \frac{d\Phi}{dt}$ (il faut, bien entendu, que le circuit électrique soit fermé afin que la f.é.m. induite e puisse créer un courant non nul).

Deuxième interprétation : On peut considérer que c'est le mouvement qui produit la f.é.m. induite e . Afin de s'opposer au mouvement, i courant induit, doit produire une force de Laplace qui s'oppose à \vec{v} . La règle des trois doigts de la main droite permet de trouver le sens du courant induit nécessaire à la création d'une force de Laplace vers le bas.

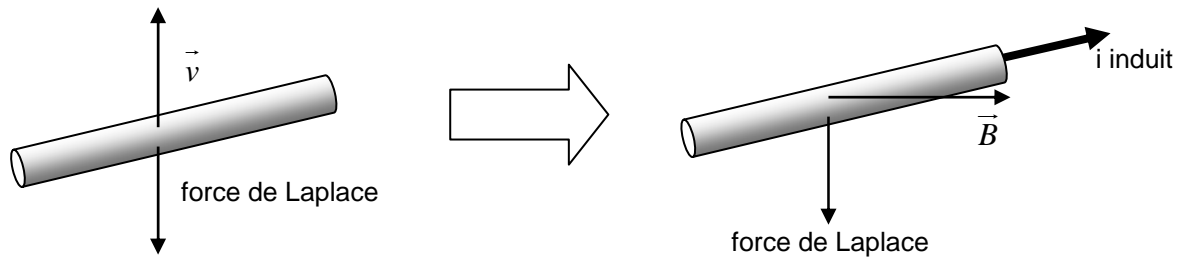


Figure 22
Sens du courant induit, opposition au mouvement

Règle des trois doigts de la main gauche :

Afin de déterminer le sens de la f.é.m. induite, on peut faire appel à la règle dite "des trois doigts de la main gauche" où le pouce, l'index et le majeur sont placés de manière à former un trièdre rectangle comme l'indique la Figure 23.

D'autres dispositions des doigts sont possibles par permutation circulaire. Néanmoins celle-ci permet une meilleure mémorisation. En effet, lors de la détermination de la force de Laplace exercée sur un conducteur baigné par un champ \vec{B} et parcouru par un courant i , on se sert de la main droite avec le pouce qui représente toujours le champ \vec{B} et le majeur qui représente toujours le courant, l'index de la main gauche représentant la force de Laplace. Les pouces représentent le champ et les majeurs le courant.

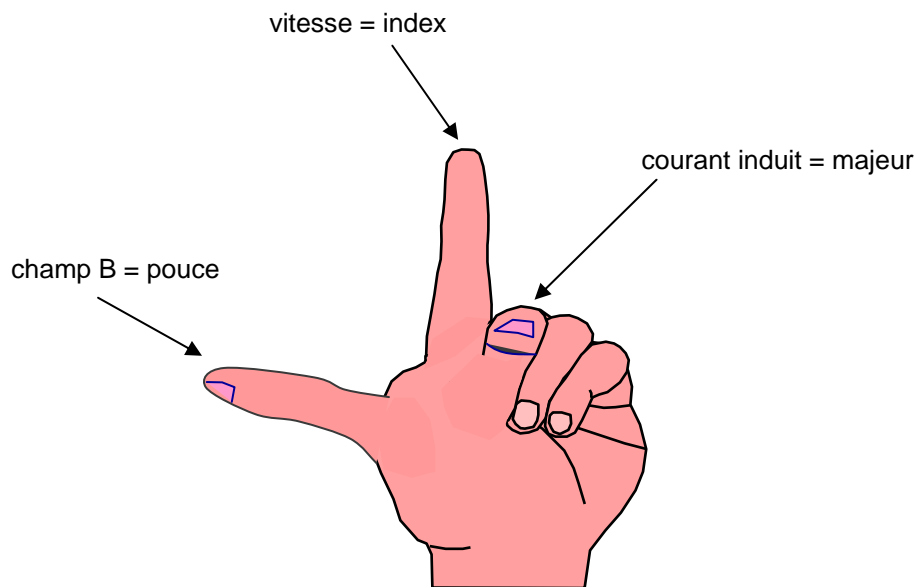


Figure 23
Règle des trois doigts de la main gauche

Exemple 2 : expérience d'Ampère

Sur la Figure 24, une barre conductrice AB est posée sur deux rails conducteurs de manière à ce que le frottement soit faible. Un générateur de tension de f.é.m. E alimente le circuit constitué par les deux rails et par la barre AB.

Au moment où on alimente le circuit, le courant i crée un champ magnétique \vec{B} dirigé vers le haut (tire bouchon de Maxwell).

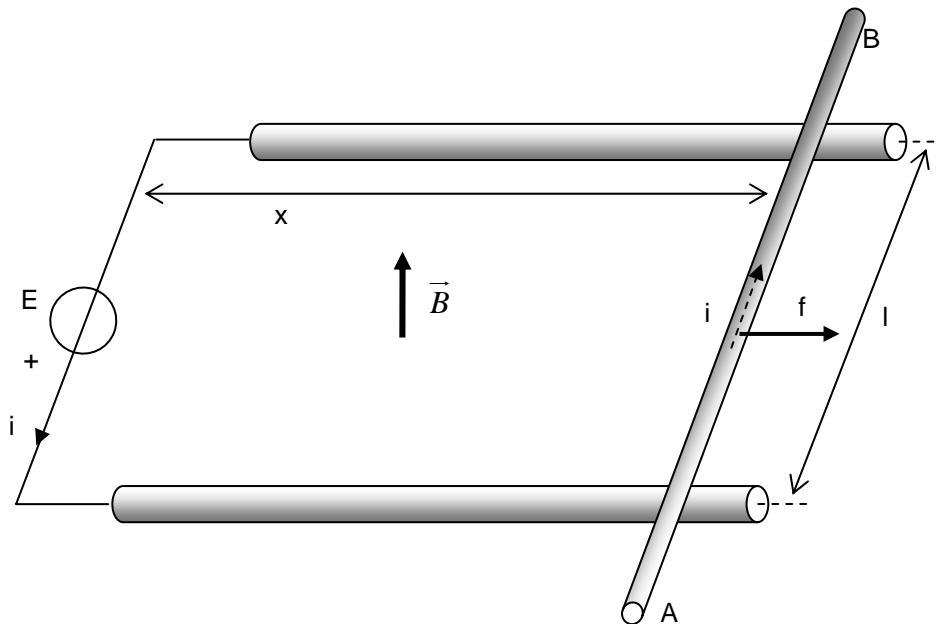


Figure 24

Ce champ magnétique exerce sur la barre AB une force de Laplace $\vec{f} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$ toujours dirigée vers la droite (règle des trois doigts de la main droite). Si on inverse le sens du courant, on inverse le sens de \vec{B} et \vec{f} est toujours vers la droite !

La barre se déplace donc sur les rails avec une vitesse \vec{v} . A cause de ce mouvement, la surface du circuit se modifie et par conséquent le flux qui le traverse.

Aux bornes de AB apparaît donc une "f.é.m. de vitesse" e, qui s'oppose à E (la cause du mouvement) :

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot v \quad (\text{valable si on considère } B \text{ indépendant du temps})$$

La vitesse de la barre augmente jusqu'à ce que cette f.é.m. soit égale et opposée à E, cela correspond à :

$$e = E \Rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{E}{B \cdot l}$$

Cette vitesse limite n'est théoriquement atteinte qu'au bout d'un temps infini.

F.é.m. d'auto-induction

Tout circuit électrique parcouru par un courant crée une f.é.m. d'auto-induction qui s'oppose à la source d'alimentation. Cet effet est beaucoup plus grand s'il s'agit d'une bobine (effet multiplié par le nombre de spires) et si les spires sont bobinées sur un noyau en fer qui concentre mieux le flux que l'air.

Considérons une bobine autour d'un noyau de section S constante et de longueur moyenne l alimentée par une source u (Figure 25) : la circulation du courant i crée dans le noyau une excitation magnétique

$$H = \frac{ni}{l} \text{ à laquelle correspond le champ magnétique } B = \mu \frac{ni}{l}.$$

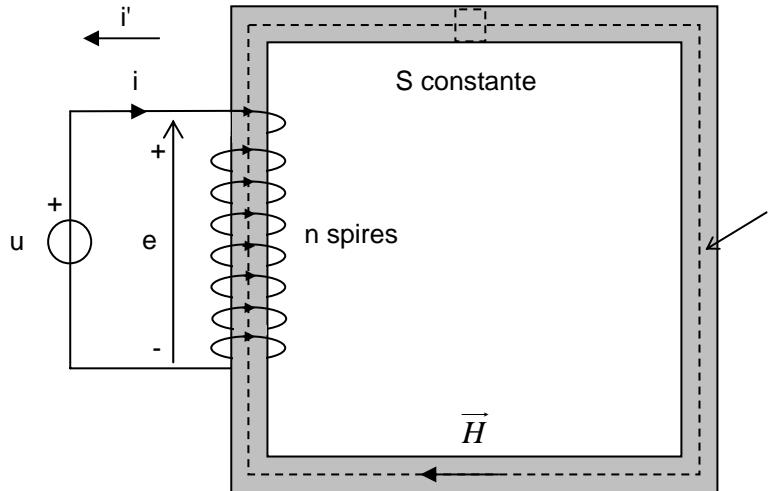


Figure 25
F.é.m. d'auto-induction

Chaque spire du circuit, de surface S , est traversée par le flux du champ \vec{B} :

$$\Phi = B \cdot S = \mu \cdot \frac{ni}{l} \cdot S$$

Si le courant i est variable (alternatif par exemple), le flux l'est aussi et il apparaît donc aux bornes du circuit une f.é.m. e :

$$e = n \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{n^2}{l} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \frac{1}{\mu \cdot S}$$

Le facteur de proportionnalité s'appelle **inductance propre** de la bobine

$$\boxed{L = \frac{n^2}{l \cdot \mu \cdot S}} \quad (1.15), \text{ l'inductance s'exprime en Henry (H).}$$

La f.é.m. s'exprime alors sous la forme :

$$e = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (1.16)$$

Cette f.é.m. d'auto-induction s'oppose à la f.é.m. u qui alimente la bobine; elle a donc les polarités représentées à la Figure 25 et tend à faire circuler le courant induit i' opposé à i .

Si on néglige la résistance de la bobine, la loi des mailles s'écrit, à chaque instant :

$$u - e = 0$$

F.é.m. de "transformation" produite par une variation du flux "embrassé"

Une f.é.m. peut être créée aux bornes d'un circuit en faisant varier le flux qui le traverse par un moyen extérieur. Considérons le circuit de la Figure 26, un noyau ferromagnétique sur lequel on a bobiné :

1. un circuit n°1 comportant n_1 spires parcourues par un courant i alternatif créé par la source de tension alternative u ,
2. un circuit n°2 comportant n_2 spires en circuit ouvert.

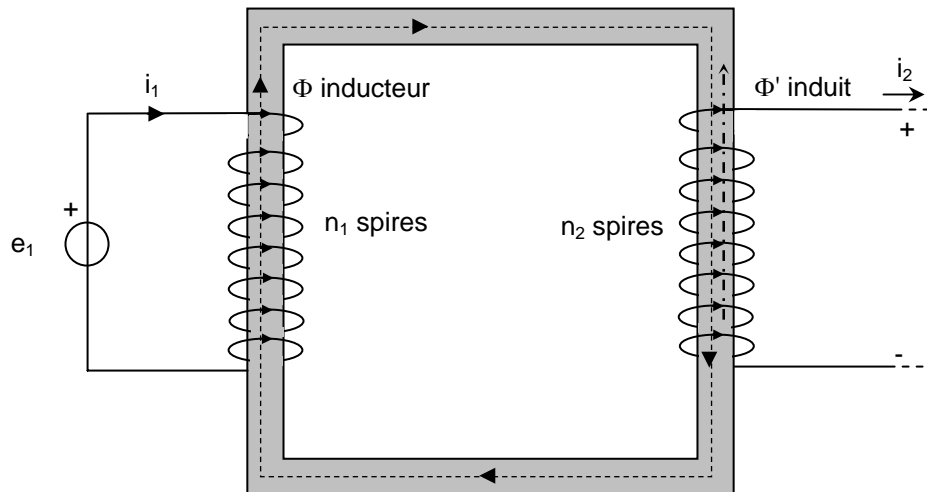


Figure 26

Le flux alternatif Φ , dû à la circulation de i , traverse les deux circuits (on admet qu'il n'y a pas de fuite). Il apparaît donc aux bornes du circuit n°2 une f.é.m. "de transformation" :

$$e_2 = n_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

la f.é.m. aux bornes du premier circuit vaut :

$$e_1 = n_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{e_2}{e_1} = \frac{n_2}{n_1}} \quad (1.17)$$

Les polarités instantanées de e_1 et de e_2 sont représentées à la Figure 26. Bien évidemment, une demi période plus tard, il faudrait tout inverser. La polarité de e_2 s'explique en considérant que si l'on fermait le circuit n°2, il circulerait un courant i_2 qui créerait un flux induit antagoniste à Φ .

Si le circuit n°2 était fermé, le flux "commun" aux deux circuits ne serait plus seulement constitué par le flux inducteur créé par le circuit n°1.

Forme mathématique générale de la f.é.m. induite

Les exemples précédents ont montrés que les f.é.m. induites dans un circuit peuvent provenir soit d'une modification de sa forme (paramètre géométrique x Figure 21 ou Figure 24), soit d'une modification de l'induction (due à une modification du courant i , (Figure 25 ou Figure 26).

En dérivant partiellement par rapport à i et à x , la loi de Faraday s'écrit :

$$e = n \cdot \frac{d\Phi}{dt} = n \left(\frac{d\Phi}{di} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right) \quad (1.18)$$

Pour les circuits linéaires, le premier terme correspond à la "f.é.m. de transformation" et le deuxième terme à la "f.é.m. de vitesse".

Explication qualitative de "l'effet de peau"

L'effet de peau est un phénomène d'origine électromagnétique qui apparaît en régime variable, la densité de courant dans la section d'un conducteur n'est pas uniforme. Elle décroît de la surface vers le centre. Ainsi en régime sinusoïdal, la densité décroît selon la loi :

$j(x) = j_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$ j_0 est la densité de courant en surface, x la profondeur, δ est une constante appelée profondeur de pénétration qui dépend du matériau et de la fréquence du courant. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de δ pour le cuivre :

Fréquence (Hz)	50	10^4	10^6	10^{10}
δ	8,5 mm	0,6 mm	60 μm	0,6 μm

A une profondeur $x = 3\delta$, la densité de courant j n'est plus que les 5/100 de j_0 ; si la profondeur est 5δ , la densité j est inférieure à 0,01 j_0 . Un calcul montre que la section équivalente utile d'un conducteur se réduit à un anneau d'épaisseur δ .

Pour 50 Hz, l'épaisseur de peau est grande devant le diamètre usuel des fils, le courant volumique est quasiment uniforme.

Pour 1 MHz, l'effet de peau est très important, le courant ne circule qu'à la périphérie des fils, la résistance augmente considérablement.

Explication qualitative

Envisageons un conducteur traversé par un courant alternatif et représentons ce conducteur à un instant où l'intensité circule du bas vers le haut en augmentant (Figure 27). La forme de la section du conducteur n'a aucune influence.

L'intensité i crée un champ magnétique \vec{B} dont les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe du conducteur et l'orientation donnée par la règle du tire-bouchon de Maxwell. Si i croît, alors \vec{B} est lui aussi croissant et donc dépendant du temps. Ce champ variable (champ inducteur) va donc induire une f.é.m.

dans le métal du conducteur ($e = \frac{d\Phi}{dt}$). D'après la loi de Lenz, les boucles de courant engendrées par la

f.é.m. induite seront orientées de manière à s'opposer au flux inducteur.

Comme le montre la Figure 27, ce courant induit s'ajoute au courant inducteur au voisinage de la surface du conducteur et se retranche en profondeur. L'intensité du courant électrique est donc plus élevée près de la surface que dans le conducteur. Ce phénomène est d'autant plus marqué que la fréquence de

variation ($\frac{d\Phi}{dt}$) est importante.

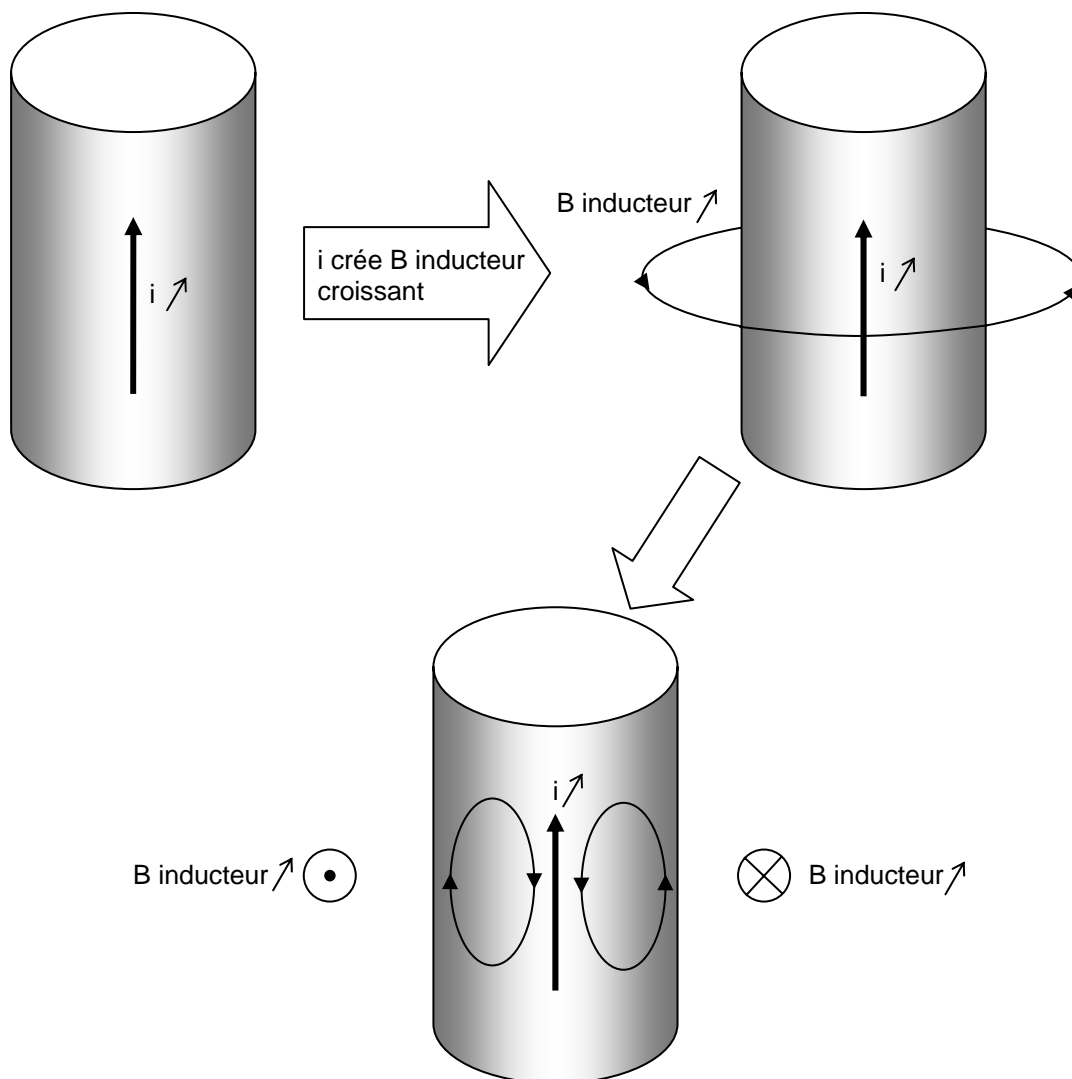


Figure 27
Explication qualitative de l'effet de peau

Courants de Foucault

On appelle **courant de Foucault**¹ le courant créé par le déplacement ou le changement du champ magnétique (courant d'induction) dans une masse métallique.

Lorsqu'un conducteur (cuivre, fer, etc.) subit des variations de flux magnétique soit parce que ce conducteur est en mouvement relatif par rapport au champ \vec{B} , soit parce que le champ \vec{B} est variable avec le temps il apparaît une f.é.m. d'induction au sein du conducteur. Cette f.é.m. met en mouvement les électrons mobiles du conducteur créant ainsi un courant électrique que l'on désigne par «courant de Foucault». L'intensité du courant est proportionnelle à la variation du flux magnétique en fonction du temps. Les courants de Foucault ont des parcours compliqués au sein de la matière où aucun fil ne les guide. On sait toutefois qu'ils forment des lacets et des boucles, d'où leur autre nom de «courants tourbillonnaires».

¹ Physicien français (1819-1868), Jean Bernard Léon Foucault est surtout connu pour les résultats obtenus concernant la vitesse de la lumière et la mise en évidence du mouvement de la Terre. On peut citer encore ses travaux en électromagnétisme, avec les courants qui portent aujourd'hui son nom (courant de Foucault), et qu'il observe en 1855. Il invente le gyroscope en 1852.

Les courants de Foucault se manifestent chaque fois qu'un matériau conducteur est en mouvement relatif au sein d'un champ magnétique : ils sont induits par le déplacement. Nombre de dispositifs industriels utilisent cette induction pour transformer l'énergie mécanique en énergie électrique, puis éventuellement en chaleur.

Tous exploitent le principe que Léon Foucault mit en œuvre dans une expérience de 1855 lorsqu'il fit tourner un disque de cuivre dans l'entrefer d'un aimant. Puisqu'il y a mouvement relatif conducteur champ \vec{B} , il y a variation de flux magnétique. Par conséquent un tel disque est parcouru de courants de Foucault. Ces courants induits échauffent la matière qu'ils traversent par effet Joule, car les électrons qui les composent choquent sans cesse les autres charges électriques présentes dans le matériau et leur transfèrent une partie de leur énergie, qui est ainsi transformée en chaleur. Cette énergie provient de la seule source d'énergie présente : l'opérateur actionnant le disque. C'est pourquoi Foucault peinait à actionner la manivelle ! Si le mouvement de rotation n'est pas entretenu, toute l'énergie mécanique initiale du disque se transforme en chaleur, et le disque arrête de tourner.

Applications des courants de Foucault

Ralentisseurs électromagnétiques

Les courants de Foucault sont à la base des ralentisseurs électromagnétiques pour camions. Ce type de frein équipe aujourd'hui la majorité des poids lourds. Leur avantage est d'être sans contact, donc sans usure. L'utilisation prolongée des freins "normaux" ou leur sollicitation répétée développent des énergies très élevées qui échauffent les garnitures, les disques ou les tambours. On s'expose alors à une usure prématurée et à une dangereuse perte d'efficacité des freins. Destinés à prendre en charge les freinages d'endurance ou les freinages répétitifs, les ralentisseurs permettent de garder les freins de service à basse température et de préserver toute leur efficacité en cas de freinage d'urgence.

Dans ces dispositifs, des disques épais en acier, solidaires de l'arbre de transmission, tournent entre des électroaimants alimentés par une batterie. Quand on désire freiner le véhicule, on alimente en courant les électroaimants. Plus la vitesse du véhicule est grande, plus la rotation des disques entre les électroaimants est grande et plus le freinage est efficace. Les ralentisseurs sont donc d'autant plus efficaces que le véhicule roule vite, ce qui, en descente, est idéal. En revanche, leur efficacité s'amointrit aux faibles vitesses jusqu'à s'annuler à l'arrêt : c'est pourquoi, pour les faibles allures, on utilise les freins mécaniques classiques.

Dans les trains à grande vitesse, l'évacuation de la chaleur produite par les ralentisseurs est problématique : la puissance de freinage nécessaire pour ralentir un train est si grande que les disques que l'on pourrait loger dans les bogies ne résisteraient pas aux échauffements associés. Une solution astucieuse est de réaliser le freinage en induisant des courants de Foucault directement dans les rails, qui ont le temps de refroidir entre deux trains.

La Figure 28 illustre le principe du ralentisseur électromagnétique. Le métal conducteur du disque en rotation pénètre dans la zone de champ B fort créé par l'électro-aimant. Il y a donc variation du flux en fonction du temps pour ce morceau de métal. Des f.é.m. induites apparaissent tendant à créer des boucles de courants de Foucault qui s'opposent à cette variation de flux. Un phénomène identique se produit lorsque le métal du disque en rotation quitte la zone de champ fort pour retrouver une zone de champ faible. Là aussi, cette variation de flux crée une f.é.m. induite qui elle-même engendre des boucles de courants de Foucault qui vont contrer cette variation de flux.

Dans la zone de champ fort, ces courants de Foucault subissent des forces de Laplace dans le sens indiqué sur la figure (règle des trois doigts de la main droite) créant ainsi un couple antagoniste au couple moteur mettant le disque en rotation. Il y a freinage.

Afin de dissiper l'énergie apparue par effet Joule dans le disque, celui-ci est ajouré et muni de pâles de ventilation.

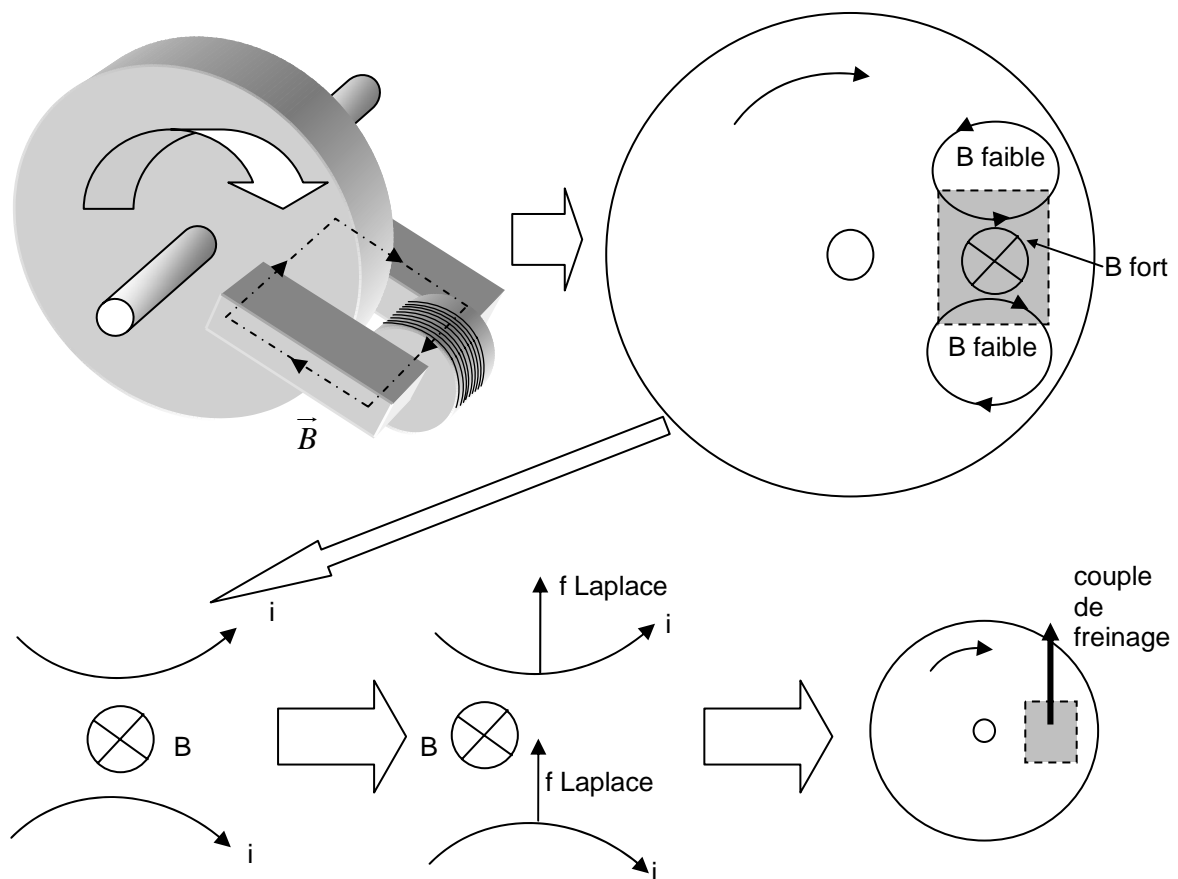


Figure 28
Ralentisseur électromagnétique

Chauffage par induction

Les tables de cuisson à induction sont constituées d'enroulements de cuivre recouverts d'une plaque sur laquelle on dépose une casserole au fond métallique, de préférence épais. Les enroulements de cuivre servent à créer le champ \vec{B} inducteur variable en fonction du temps. La chaleur est créée par les courants de Foucault induits dans le fond même de la casserole. Comme les effets de l'induction sont d'autant plus importants que les variations du champ magnétique sont rapides, on emploie des champs magnétiques oscillants à une fréquence de 20 kilohertz, 400 fois plus élevés que les 50 hertz du secteur. Si la table à induction reste sous tension en l'absence de casserole, aucune énergie n'est consommée et aucune chaleur n'est produite.

Les corps isolants peuvent être posés sur une plaque à induction alimentée sans dommage pour eux, la plaque elle-même n'est pas chaude et le corps isolant, ne pouvant pas être le siège de courant de Foucault, ne s'échauffe pas. Comme le corps humain est un assez piètre conducteur (comparé aux métaux), le cuisinier peut même poser sa main sur la plaque sans danger...

Dans l'industrie, des fours à induction servent à chauffer des lingots de métal ou à faire fondre les parallélépipèdes grossiers constitués par des carcasses de véhicules compressées.

Inconvénients des courants de Foucault

En électrotechnique on utilise des matériaux ferromagnétiques pour conduire les lignes de champ magnétique. Hélas, ces matériaux possèdent des propriétés conductrices vis-à-vis du courant électrique. En présence d'un champ variable et donc d'un flux variable, la f.é.m. induite dans un tel matériau crée des courants de Foucault circulant sur des plans perpendiculaires aux lignes de champ. Ces courants produisent, par effet Joule, un dégagement de chaleur au sein même du circuit magnétique. Dans le domaine des circuits magnétiques des machines électriques, cet effet Joule n'est pas du tout souhaité, il est nuisible au rendement des machines. Afin de réduire les pertes d'énergie, on cherche à réduire le plus possible ces courants de Foucault.

Les constructeurs de machines électriques exploitent parallèlement deux procédés :

1. le circuit magnétique est "feuilleté" en utilisant des tôles minces (0,23 à 0,35 mm) recouvertes d'isolant électrique (revêtement très mince, 2 à 5 μm , de silicate de magnésie par exemple).

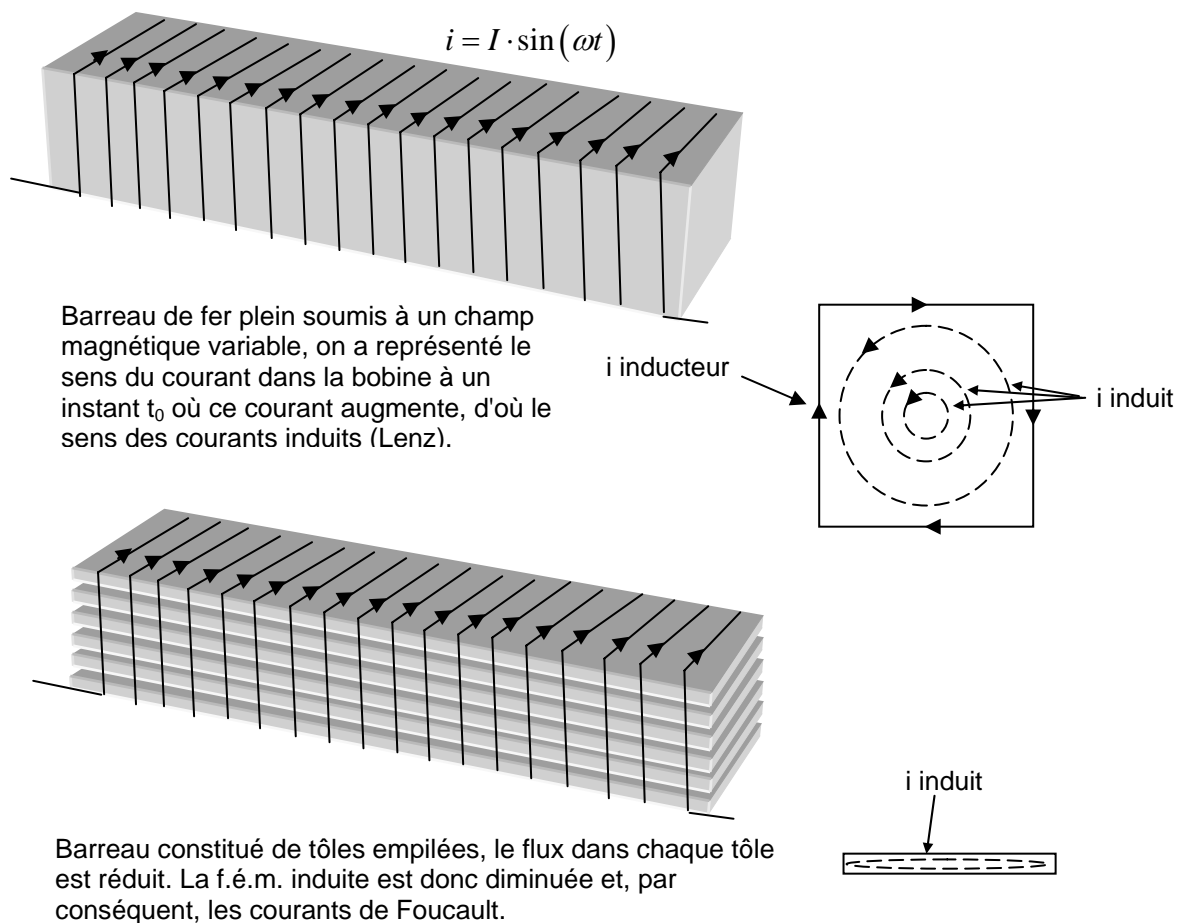


Figure 29

Feuilletage d'un élément de circuit magnétique afin de réduire les courants de Foucault

Le flux dans chaque tôle ($\Phi = B \cdot S$) est considérablement réduit par la diminution de S qu'entraîne le feuilletage. La f.é.m. induite ($e = \frac{d(B \cdot S)}{dt} = S \cdot \frac{dB}{dt}$) est donc, elle aussi, très atténuée et par conséquent les courants de Foucault.

2. La résistance électrique de l'alliage de fer utilisé pour les tôles est augmentée. L'utilisation, par exemple, de fer à 3 % de silicium permet d'accroître la résistance électrique d'un facteur supérieur à 4 par rapport à celle d'un fer pur. La résistance électrique du métal étant plus grande, les courants s'y développent moins facilement.

Dans le domaine des hautes fréquences, on emploie les ferrites qui sont des matériaux pratiquement isolants.

Il est à noter que l'utilisation d'alliage de fer au silicium facilite également, comme nous l'avons déjà dit, l'aimantation de la tôle. En effet, les courants induits (de Foucault) freinent le déplacement des parois de Bloch, ils retardent ainsi l'apparition de grands domaines (de Weiss) ; ce faisant, ils diminuent d'autant la perméabilité magnétique de la tôle.

L'ensemble des pertes, dues aux courants de Foucault et aux pertes par hystérésis, des tôles d'un circuit magnétique porte la dénomination de "**pertes fer**".

Principe de la guitare électrique

Vers le milieu des années 1950, après l'apparition de la musique "rock", certains guitaristes sont passés de la guitare acoustique à la guitare électrique. Jimmy Hendrix a été l'un des premiers à se servir d'une guitare électrique comme d'un instrument électronique. Hendrix grattait ses cordes avec son plectre, il se plaçait avec sa guitare devant un haut-parleur pour prolonger la rétroaction et il plaquait des accords au moment où la rétroaction atteignait son maximum. Il a transformé la musique rock que l'on connaissait en participant au mouvement psychédélique de la fin des années 1960. On peut dire qu'il a contribué à fonder le "heavy metal" des groupes des années 1970 comme Led Zeppelin, Deep Purple et autres. Jimmy Hendrix utilisait surtout une guitare "Fender Stratocaster". Dans une guitare acoustique, les sons sont produits par la résonance acoustique des oscillations des cordes dans la partie creuse de l'instrument. Une guitare électrique, elle, est un instrument massif, il n'y a donc pas de résonance possible. Les oscillations des cordes de métal sont détectées par des capteurs électriques qui envoient les signaux à un amplificateur qui lui-même les envoie à un ensemble de haut-parleurs.

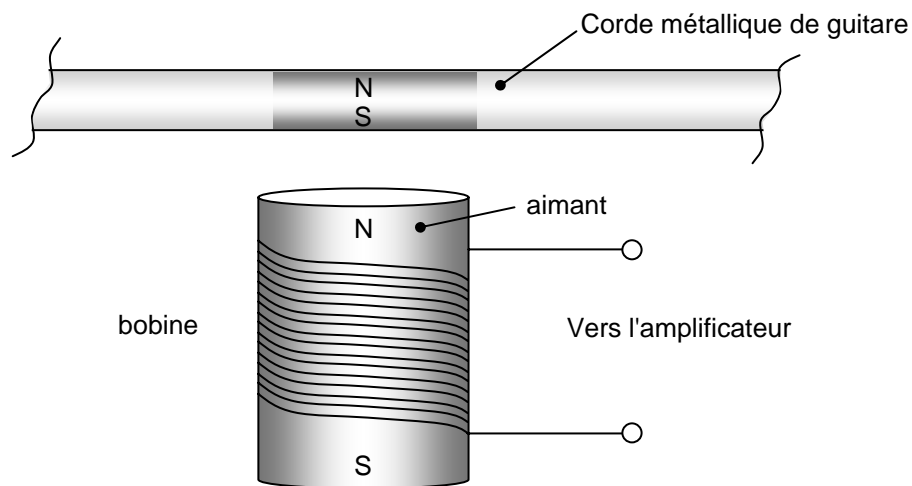


Figure 30

Vue d'un capteur de guitare électrique. Lorsque la corde de métal (qui agit comme un aimant) oscille, elle produit une variation du flux magnétique qui induit un courant dans la bobine.

Le principe de base de la guitare électrique est illustré à la Figure 30. Le fil reliant la guitare à l'amplificateur est enroulé autour d'un petit aimant. Le champ magnétique de l'aimant crée un pôle nord et un pôle sud dans le segment de corde métallique situé juste au-dessus de l'aimant. Ce segment de corde possède alors son propre champ magnétique. Lorsque la corde est pincée et qu'elle oscille, son mouvement relatif par rapport à la bobine fait varier le flux de son champ magnétique dans la bobine et y induit un courant. Quand la corde oscille en s'approchant et en s'éloignant de la bobine, le courant induit change de sens à la même fréquence que les oscillations de la corde et il transmet ainsi les fréquences d'oscillations à l'amplificateur.

Dans une Stratocaster, il y a trois groupes de capteurs (Figure 31) placés près de l'extrémité des cordes (dans la partie large de l'instrument). Le groupe placé le plus près de l'extrémité détecte mieux les oscillations de haute fréquence des cordes; le groupe le plus éloigné de l'extrémité détecte mieux les oscillations de basse fréquence. Le musicien peut choisir le groupe ou la paire de groupes de capteurs qui enverra les signaux à l'amplificateur et aux haut-parleurs, en actionnant un interrupteur sur la guitare.

Afin de mieux contrôler ses effets musicaux, Hendrix rembobinait parfois le fil dans les capteurs de sa guitare pour en modifier le nombre de spires. De cette façon, il modifiait la f.é.m. induite dans les bobines et, par conséquent, leur sensibilité relative aux oscillations des cordes.

La guitare électrique offre plus de contrôle sur le son produit qu'une guitare classique, même sans rembobiner les capteurs !



Figure 31
Guitare Fender Statocaster, vu des trois groupes de capteurs

Soufflage magnétique de l'arc électrique dans un contacteur ou un disjoncteur

Dans un contacteur ou un disjoncteur un arc électrique se crée à l'ouverture des contacts (encore appelés pôles). Cet arc électrique est un plasma gazeux, donc un conducteur « mobile » susceptible de se déplacer. On crée un champ \vec{B} dans la zone où apparaît l'arc afin que celui-ci soit soumis à une force de Laplace dont le but est de l'allonger vers l'extérieur et de le pousser dans les séparateurs (voir figures ci-dessous). Essayer de retrouver le sens de la force de Laplace à l'aide de la règle des trois doigts de la main droite...

Etant donné qu'une force de Laplace intense agit sur un arc dont la masse est très faible, il s'ensuit que l'arc se déplace extrêmement vite, dépassant même la vitesse du son. Le soufflage de l'arc est un phénomène très efficace.

L'arc est utilisé pour couper le courant, en effet, une force contre électromotrice proportionnelle à la longueur de l'arc électrique apparaît au sein de celui-ci. Il y a donc lieu d'allonger cet arc afin d'augmenter la force contre électromotrice et de réduire le temps de coupure du courant.

D'autre part, déplacer l'arc permet de le pousser vers une série de séparateurs métalliques qui fractionne l'arc en une dizaine de morceaux. Il apparaît une f.c.è.m. supplémentaire de 20 à 40 V (U_{AC}) par morceau d'arc. Non seulement cela augmente encore la f.c.è.m. totale, mais cela permet également de refroidir l'arc.

La tension d'arc escomptée quand il y a fractionnement se calcule ainsi :

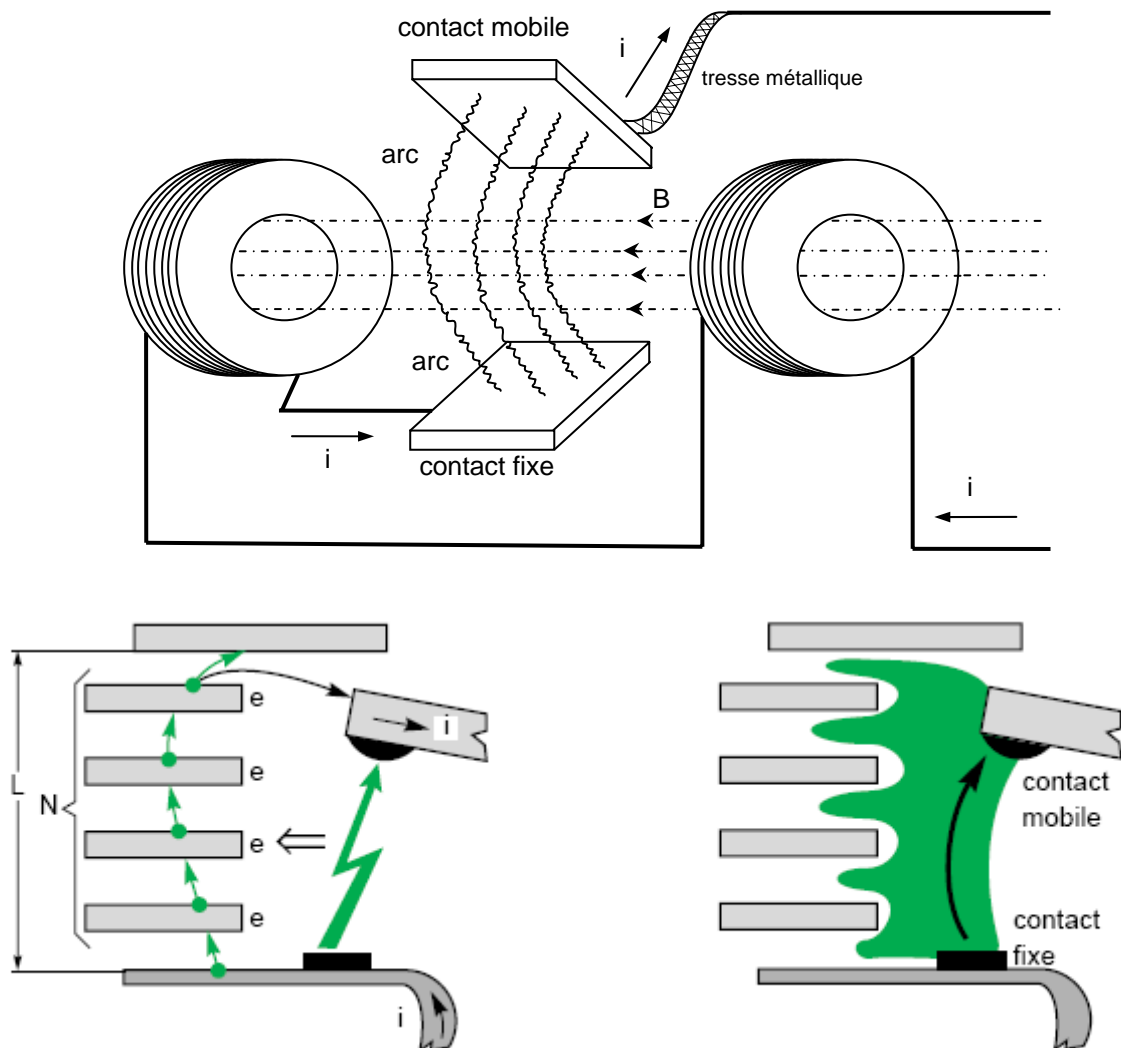
$$U_a \approx N \cdot U_{AC} + (L - N \cdot e) U_L \quad (\text{voir figure ci-dessous})$$

où :

e = espace entre 2 séparateurs, N = nombre de séparateurs, L = longueur de la chambre de coupure.

Par exemple : avec $N = 10$, $L = 4 \text{ cm}$, $e = 0,2 \text{ cm}$, $U_{AC} \approx 30 \text{ V}$ et $U_L \approx 75 \text{ V/cm}$,

$$U_a \approx 300 + 150 = 450 \text{ V}$$



Exercices

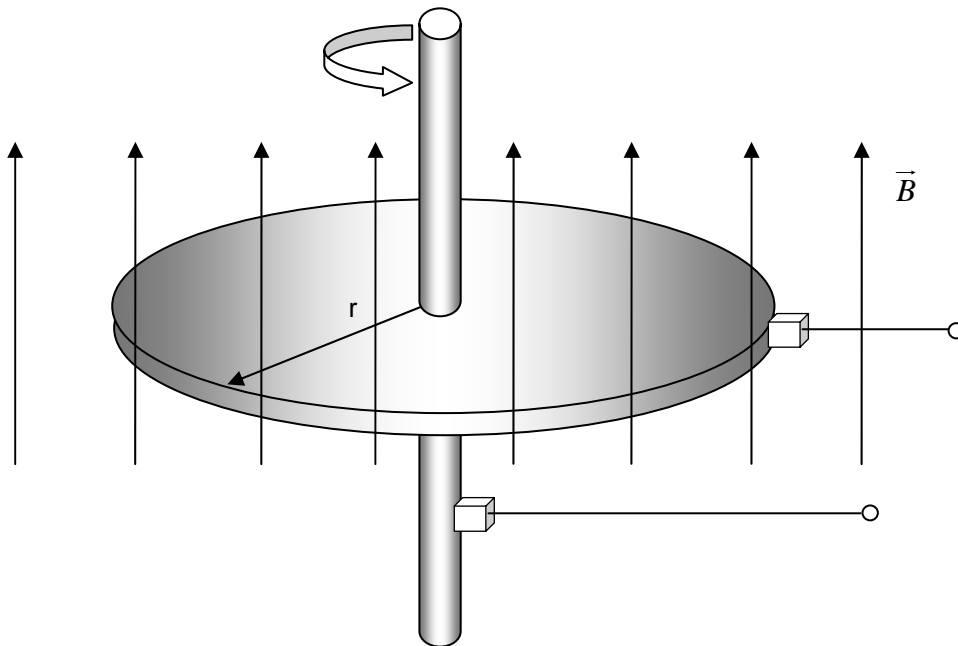
Un disque en cuivre de rayon $r = 10 \text{ cm}$ tourne autour de son axe dans un champ magnétique $B = 0,5 \text{ T}$ parallèle à son axe. Deux contacts glissants sont disposés l'un sur l'axe (qui est conducteur) et l'autre sur la périphérie du disque. on admettra que le courant circule en ligne droite le long des rayons élémentaires du disque.

Quelle est la f.é.m. U entre les contacts si on fait tourner le disque à 1000 tr/min ? Déterminer son sens.

On suppose que la résistance interne du circuit entre les balais vaut $R = 0,05 \Omega$, on alimente le circuit sous une tension $V = 0,5 \text{ V}$.

Quel est le couple de démarrage du disque ?

Quelle est la vitesse limite qu'il atteindra, si on néglige les frottements et l'inertie ?



Calcul de la f.é.m.

$$\text{On a : } U = \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot \pi \cdot r^2 \cdot n (\text{tr/s}) = 0,5 \cdot \pi \cdot 0,1^2 \cdot \frac{1000}{60} \approx 0,26 \text{ V}$$

Le sens de cette f.é.m. induite est donné par la loi de Lenz. La force de Laplace exercée sur l'intensité (si le circuit est fermé) doit s'opposer au mouvement, pour cela, on détermine que l'intensité doit s'écouler de l'axe vers le balai situé au bord du disque à l'aide de la règle des trois doigts de la main droite.

Si, maintenant, on applique une d.d.p. entre les balais, un courant électrique va circuler dans le disque suivant un rayon. Ce courant sera soumis à une force de Laplace. Courant et champ magnétique étant perpendiculaire, on a :

$$F = B \cdot i \cdot l$$

$$\text{L'intensité sera égale à } i = \frac{E}{R} = \frac{0,5}{0,05} = 10 \text{ A}$$

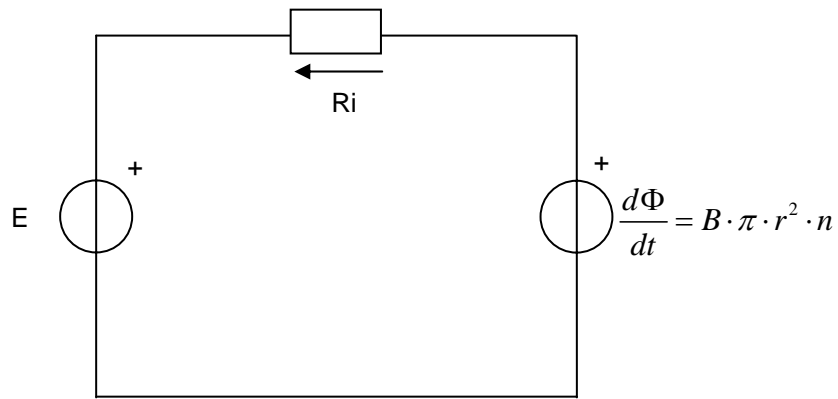
Il s'en suit que $F = B \cdot i \cdot l = 0,5 \cdot 10 \cdot 0,1 = 0,5 \text{ N}$ et donc le couple de démarrage :

$$C_{\text{dém}} = F \times \frac{r}{2} = 0,5 \times 0,05 = 0,025 \text{ N.m} ; \text{ le point d'application de } f \text{ se situe à } \frac{r}{2} \text{ de l'axe.}$$

Sous l'impulsion du couple de démarrage, le disque va se mettre à tourner et à accélérer. Ce faisant, la f.é.m. calculée précédemment va se développer et augmenter, s'opposant ainsi au passage du courant. En l'absence de frottements, la vitesse de rotation va tendre vers une valeur limite telle que la f.é.m. soit égal à la f.c.é.m. l'intensité qui circule alors est nulle (en présence de frottement, la circulation d'une intensité non nulle demeurerait nécessaire pour vaincre le couple de frottement).

Pour déterminer la vitesse limite, on résout l'équation :

$$E = Ri + \frac{d\Phi}{dt} \text{ avec } i = 0$$



Circuit électrique équivalent du disque alimenté par le générateur de tension E

$$E = \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \pi \cdot r^2 \cdot n \text{ (tr / s)} \Rightarrow n = \frac{E}{B \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{0,5}{0,5 \cdot \pi \cdot 0,1^2} \approx 31,83 \text{ tr/s} \approx 1910 \text{ tr/min}$$

Principe du flux maximal

Tout circuit parcouru par un courant tend à embrasser le maximum de flux. La position correspondant à ce flux maximal est à énergie potentielle minimale, c'est donc une position d'équilibre stable.

Les conséquences de ce principe sont multiples et expliquent nombre d'applications, par exemple le déplacement des armatures d'un électro-aimant qui correspond à une augmentation du flux.

- Un circuit rigide parcouru par un courant d'intensité constante se déplace spontanément, s'il le peut, de telle manière que le flux du champ magnétique soit maximal.
- Un circuit électrique déformable parcouru par un courant électrique prend une forme telle que le flux de champ magnétique qui le traverse soit maximal. Il s'agit généralement d'une forme circulaire s'il n'y a pas de contrainte particulière quant à la géométrie.

Diverses définitions de l'inductance

Inductance propre

En désignant par Φ le flux produit par un circuit parcouru par un courant i et comportant n spires, on définit son "inductance propre" L , par la formule :

$$\boxed{L = n \cdot \frac{\Phi}{i}} \quad (1.19), L \text{ s'exprime en Henry (H)}$$

Il se trouve que Φ n'est pas toujours très bien défini. Φ est le flux produit par le circuit et le flux qui le traverse. Considérons par exemple le flux d'une bobine dans un matériau ferromagnétique (Figure 32), une partie de ce flux fuit dans l'air (Φ_f) et il reste seulement une partie $\Phi_m = \Phi - \Phi_f$ utile dans le noyau.

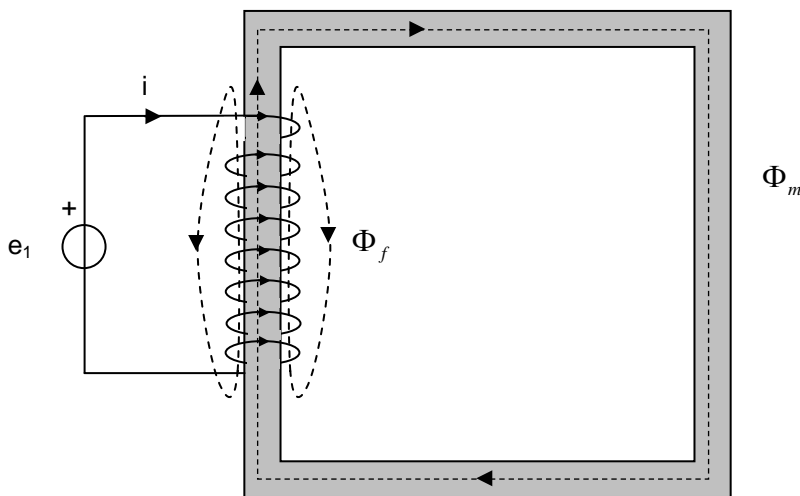


Figure 32
Flux de fuite

Pour un bobinage épais dont les spires intérieures sont plus petites que les spires extérieures, une fraction du flux produit par les spires extérieures ne traverse pas les spires intérieures.

On est conduit à définir deux autres inductances, différentes de l'inductance propre, faisant intervenir les flux de fuites Φ_f et de magnétisation Φ_m :

inductance de fuite $\boxed{L_f = n \cdot \frac{\Phi_f}{i}} \quad (1.20)$

inductance de magnétisation $\boxed{L_m = n \cdot \frac{\Phi_m}{i}} \quad (1.21)$

On suppose ici que les flux Φ_f et Φ_m sont proportionnels au courant, ce qui n'est pas toujours rigoureusement le cas.

L'inductance propre est égale à la somme de l'inductance de fuite et de l'inductance de magnétisation :

$$\boxed{L = L_f + L_m} \quad (1.22)$$

On définit également le coefficient de fuite du bobinage, k , comme le rapport entre le flux utile ou de magnétisation et le flux total :

$$k = \frac{\Phi_m}{\Phi_f + \Phi_m} = \frac{L_m}{L} \quad (1.23)$$

Ce coefficient est toujours plus petit que 1, il est généralement déterminé de façon empirique. Attention, il ne faut pas confondre le coefficient de fuite et le coefficient de Hopkinson $\nu = \frac{1}{k}$.

Inductance dynamique

Lorsque les noyaux sont composés de matériaux ferromagnétiques, à partir d'une certaine valeur du courant d'excitation, le flux produit n'est plus proportionnel au courant, il n'augmente pratiquement plus, il y a saturation du noyau. L'inductance ne peut alors plus être considérée comme constante, on définit une inductance dynamique sous forme différentielle :

$$L_{dynamique} = n \cdot \frac{d\Phi}{di} \quad (1.24)$$

Pour un circuit polarisé par un courant continu et excité par un courant alternatif de faible amplitude, l'inductance dynamique, égale à la pente de la courbe $n\Phi(i)$ en chaque point, présente des variations telles que celles dessinées sur la Figure 33.

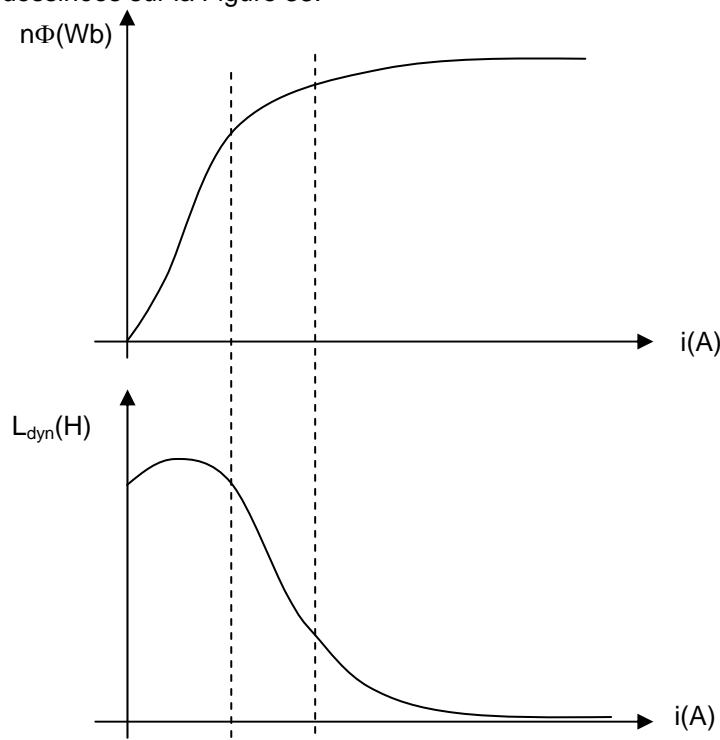


Figure 33
Inductance dynamique

Circuits couplés linéaires

Définitions

On peut considérer toutes les machines électriques comme des circuits "couplés mobiles", c'est-à-dire des ensembles de bobinages parcourus par des courants (inducteurs ou induits), ayant un circuit magnétique commun et dont la géométrie peut varier. Il est donc nécessaire de définir les inductances de ces divers circuits. En effet, dans le cas où la géométrie de la machine n'est pas variable, les inductances peuvent éventuellement varier en fonction de la valeur des courants (à cause du phénomène de saturation). Dans le cas où la géométrie de la machine est variable, ces inductances varient, non seulement en fonction de la valeur des courants, mais encore en fonction de la position de l'armature ou du rotor. Dans ce cas, ce sont ces variations qui produisent le couple ou la force électromagnétique.

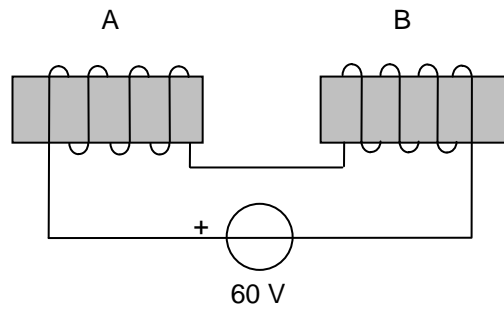
Exercices

1. Chacun des 36 pôles de la roue polaire d'un alternateur de 500 MVA (voir photo ci-dessous) est composé de 21 spires de cuivre ayant une section de 11 X 88 mm. Les bobines ont une longueur de 3100 mm et une largeur de 700 mm. Sachant que le courant d'excitation est de 2400 A et que les pôles sont raccordés en série, calculer :

- La FMM par pôle.
- La tension d'excitation requise si la résistivité du cuivre à 105°C est de $23,028 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$
- La puissance d'excitation en kW.



2. Soit deux électro-aimants A et B branchés en série, et raccordés à une source de tension de f.é.m. 60 volts. La résistance de la bobine A est de 50Ω , celle de B de 70Ω .



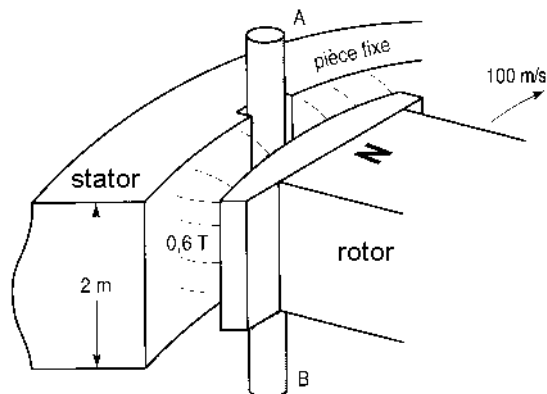
La bobine A possède 2000 spires, la bobine B 800 spires.

Déterminer :

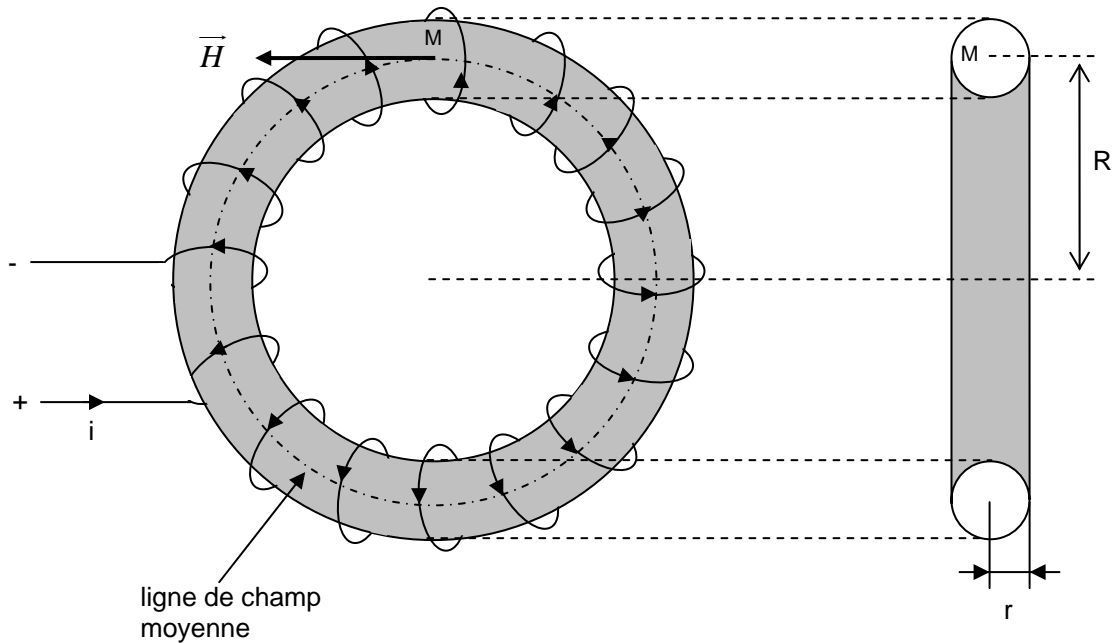
- La FMM de chacune des bobines.
- La puissance dissipée dans chacune des bobines.
- S'il y a attraction ou répulsion entre ces deux électro-aimants, (pour ce faire, indiquez les pôles N ou S sur la figure) ?
- Si les deux bobines ont les mêmes dimensions, laquelle atteindra la plus haute température ?

Remarque : Le fil ayant servi à confectionner la bobine A n'a pas forcément la même section que le fil ayant servi à fabriquer la bobine B.

3. Les conducteurs du stator d'un alternateur sont baignés par le champ magnétique rotorique de $0,6 \text{ T}$ sur une longueur de 2 mètres (AB sur la figure ci-dessous). L'extrémité des pôles du rotor se déplace à 100 m.s^{-1} Calculer la valeur de la tension induite dans chaque conducteur.



4. On considère un tore de fer doux de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 3200$. Ce tore possède un rayon moyen $R = 5$ cm, sa section est celle d'un disque de rayon $r = 0,80$ cm. On enroule 500 spires de fil de cuivre autour du tore.



4.1. A l'aide du théorème d'Ampère, calculer l'excitation magnétique $|\vec{H}|$ qui règne dans le tore si les spires sont parcourues par 1 A.

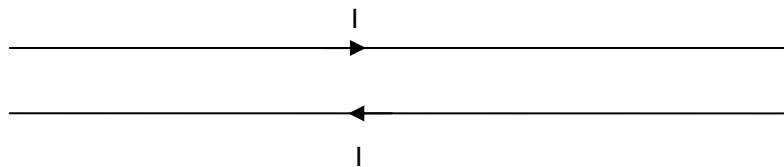
4.2. Calculer le champ magnétique $|\vec{B}|$ qui règne dans le tore (on rappelle que

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI} \approx \frac{1}{800000}).$$

4.3. Calculer l'inductance L du solénoïde enroulé sur le tore (on admettra que μ est constante).

4.4. On admet que la résistance des 500 spires est négligeable. Déterminer la courbe $i = f(t)$ donnant l'évolution de l'intensité i en fonction du temps si l'on branche le solénoïde sur une source de tension continue de 12 V. Combien de temps faut-il pour que l'intensité atteigne 30 A ?

5. On considère deux barres de cuivre rectilignes de longueur infinie. Elles sont écartées de 10 cm et traversées chacune par une intensité I de 50000 A lors d'un court circuit.



Calculer la force de Laplace exercée par mètre de longueur de barre. Le sens des courants étant donné par la figure ci-dessus, représenter le sens de la force exercée sur chacune des barres.

6. Une bobine possédant une inductance de 3 H est traversée par un courant de 50 A.

Calculer :

- La valeur de l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique ;
- L'énergie débitée par la bobine si le courant diminue de 50 A à 30 A ;
- La tension induite aux bornes de la bobine ainsi que la puissance débitée si cette diminution de 50 A à 30 A se fait uniformément en 30 millisecondes.

Solutions

1. $FMM = ni = 21 \times 2400 = 50,4 \text{ kA.t}$

Il faut calculer la résistance des 36 paquets de 21 spires et appliquer $u = r \cdot i$

longueur d'une spire = $(3,1 + 0,7) \times 2 = 7,6 \text{ m}$;

longueur totale du conducteur = $7,6 \times 21 \times 36 = 5,7456 \cdot 10^3 \text{ m}$

section d'une spire = $0,011 \times 0,088 = 968 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$;

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = 23,028 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{5745,6}{968 \cdot 10^{-6}} = 136,68355 \cdot 10^{-3} \Omega,$$

Tension requise = $RI = 136,68 \cdot 10^{-3} \times 2400 = 328 \text{ V}$

Puissance requise = $RI^2 = 787 \text{ kW}$

2.1. Calculons l'intensité qui traverse les deux bobines (en série) : $I = \frac{60}{50 + 70} = 0,5 \text{ A}$

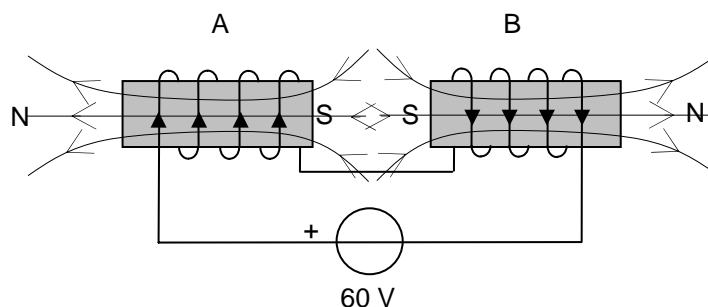
$FMM_A = 2000 \times 0,5 = 1000 \text{ A.t}$

$FMM_B = 800 \times 0,5 = 400 \text{ A.t}$

$P_A = R_A \cdot I^2 = 50 \times 0,5^2 = 12,5 \text{ W}$

$P_B = R_B \cdot I^2 = 70 \times 0,5^2 = 17,5 \text{ W}$

C'est la bobine B qui atteindra la plus haute température puisque c'est elle qui est le siège du plus grand dégagement de puissance et que les dimensions des 2 bobines (donc leur capacité à évacuer les calories) sont identiques.



Il y a répulsion, les pôles de mêmes noms se repoussent.

3. $|e| = \frac{d\Phi}{dt}$, ici, B est constant et égal à 0,6 T, il s'agit d'une barre qui se déplace relativement à un champ B à vitesse constante : $e = B \cdot l \cdot v = 0,6 \times 2 \times 100 = 120 \text{ V}$

4.

$$H = \frac{ni}{l} = \frac{ni}{2\pi R} = \frac{500}{2\pi \times 0,05} \approx 1592 \text{ A.tr}$$

$B = \mu_0 \mu_r H = 6,36 \text{ T}$

$$\Phi_{total} = n(B \cdot S) = n\mu_0 \mu_r HS = n\mu_0 \mu_r \frac{ni}{l} S \Rightarrow L = \frac{\Phi_{total}}{i} = \mu_0 \mu_r \frac{n^2}{l} S = 0,64 \text{ H}$$

$$e = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{e}{L} \Rightarrow i = \frac{e}{L} \cdot t \Rightarrow t = \frac{L}{e} \cdot i = \frac{0,64}{12} \cdot 30 = 1,6 \text{ s}$$

5. voir photocopié page 17 et 18 $F = \mu_0 \cdot \frac{i_1 \times i_2}{2\pi a} = \frac{1}{800000} \cdot \frac{50000^2}{2\pi \times 0,1} = 4973,6$ N par mètre de longueur.

Les barres tendent à s'écarter l'une de l'autre.

6. Pour un courant de 50 A, l'énergie conservée dans le champ vaut :

$$W_1 = \frac{1}{2} LI^2 = 3,75 \text{ kJ}$$

Lorsque l'intensité chute à 30 A, l'énergie conservée dans le champ devient :

$$W_2 = \frac{1}{2} LI^2 = 1,35 \text{ kJ}$$

La bobine a donc débité une énergie de : $W_1 - W_2 = 3750 - 1350 = 2400$ J

Cette énergie, puisée dans le champ magnétique, est restituée sous forme d'énergie électrocinétique au circuit sur lequel est branchée la bobine.

La tension induite aux bornes de la bobine est : $e = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = 3 \cdot \frac{50-30}{0,03} = 2000$ V

La puissance débitée par la bobine est :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{3750-1350}{0,03} = 80 \text{ kW}$$

Influence des matériaux : perméabilité magnétique, magnétisme

Dans le vide ou dans l'air, le champ magnétique est directement proportionnel à l'excitation magnétique et ne dépend donc que de l'intensité des courants et de la configuration géométrique des conducteurs électriques : $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ (1.25). Le champ magnétique B est exprimé en Tesla².

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \approx \frac{1}{800000} \quad (1.26)$$

Pour les matériaux autres que le vide ou l'air, on a

$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ avec $\mu = \mu_0 \mu_r$, μ désignant la perméabilité magnétique absolue du matériau et μ_r sa perméabilité magnétique relative.

Tous les matériaux possèdent des propriétés magnétiques : mis en présence d'une excitation magnétique \vec{H} , ils sont le siège d'un champ \vec{B} . On a déjà vu que le vide avait une perméabilité $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, et on a écrit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Pour les autres milieux de l'espace, on a supposé que l'on pouvait aussi écrire $\vec{B} = \mu \vec{H}$ en introduisant leur perméabilité magnétique absolue μ .

Pour les matériaux autres que les matériaux ferromagnétiques ou le vide, les vecteurs \vec{B} et \vec{H} ne sont pas toujours parallèles. On peut caractériser magnétiquement un tel milieu par son vecteur aimantation \vec{J} relié à l'excitation magnétique par la relation :

$\vec{J} = \chi \vec{H}$ (1.27) dans laquelle χ s'appelle la susceptibilité magnétique du matériau. Pour les matériaux magnétiques dits parfaits, les vecteurs \vec{J} et \vec{H} sont parallèles (cas des matériaux employés en l'électrotechnique).

En considérant qu'un matériau se superpose au vide, on écrira :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

soit, en posant $\mu = \mu_0 (1 + \chi)$: $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (1.28)

Ainsi, la perméabilité magnétique relative d'un matériau, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ apparaît comme étant égale à sa

susceptibilité magnétique χ augmentée de l'unité :

$$\mu_r = 1 + \chi \quad (1.29)$$

L'étude des matériaux magnétiques peut se faire au moyen de la relation (1.28); il est plus précis de classifier les matériaux d'après la relation (1.29).

Classes des matériaux en fonction de leur comportement sous le champ H

Tous les matériaux peuvent être classés à l'intérieur de 3 groupes définissant leurs propriétés magnétiques :

- diamagnétisme
- paramagnétisme
- ferri et ferromagnétisme

² Nikola Tesla (9 juillet 1856 Smiljan (Croatie) – 7 janvier 1943 New-York). Après des études de physiques et de mathématiques à la Realschule de Karlstadt, à l'école polytechnique de Graz (Autriche), et à la très réputée Université de Prague, il vient travailler en France comme ingénieur pour la Continental Edison Compagny. Il invente et construit le premier moteur asynchrone à Strasbourg en 1883. En 1884, il émigre à New York où, en association avec Georges Westinghouse, il va développer la production et le transport du courant alternatif contre Edison tenant du courant continu.

Le diamagnétisme

Les matériaux diamagnétiques ont une susceptibilité magnétique χ négative, pratiquement constante et très faible. Un matériau parfaitement diamagnétique offre une grande résistance au passage du champ magnétique. Les lignes d'excitation magnétique \vec{H} ne pénètrent pas dans le matériau. La perméabilité est donc nulle.

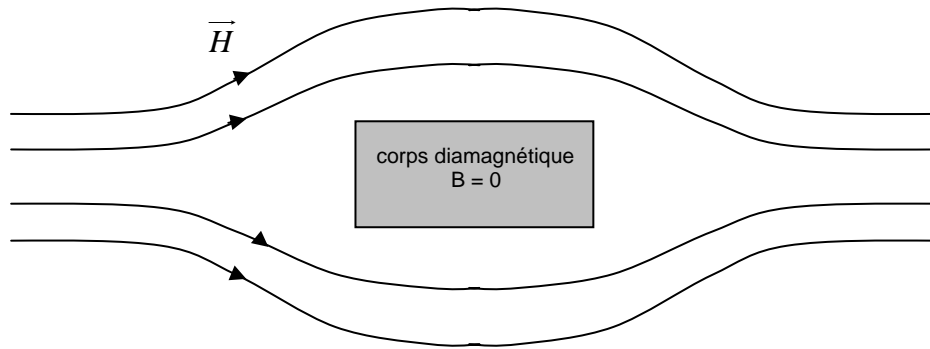


Figure 34
Comportement d'un matériau diamagnétique placé dans une excitation magnétique

La magnétisation induite dans le corps diamagnétique par une excitation \vec{H} sera dans la direction opposée à \vec{H} .

Exemples de matériaux diamagnétiques: l'eau ($\chi = -9 \times 10^{-6}$), le cuivre, le graphite, le gypse, le marbre, le quartz, le sel, les gaz rares, le bismuth ($\chi = -1,5 \times 10^{-4}$), et le diamant.

Les matériaux qui peuvent accéder à l'état supraconducteur, deviennent parfaitement diamagnétiques dans cet état.

Le paramagnétisme

Par définition, tous les matériaux qui ne sont pas diamagnétiques sont paramagnétiques. Ils possèdent une susceptibilité magnétique χ positive, pratiquement constante et très faible. Dans un matériau paramagnétique, chaque atome possède un moment magnétique non nul. On peut se représenter un moment magnétique atomique en imaginant une boucle de courant microscopique due aux électrons sur leur orbite. Bien sur, il s'agit là d'une représentation éloignée de la réalité mais qui permet d'appréhender un peu le phénomène. Sous l'action d'un champ extérieur, ces moments magnétiques s'orientent et augmentent l'excitation \vec{H} appliquée.

Comme pour le diamagnétisme, il s'agit d'un phénomène faible et temporaire. Contrairement au diamagnétisme, la réponse d'un matériau paramagnétique vise à renforcer l'action de l'excitation \vec{H} extérieure.

Notons que ce phénomène diminue avec l'augmentation de la température puisque l'agitation thermique désoriente les dipôles magnétiques élémentaires. La plupart de métaux sont paramagnétique.

Exemples de matériaux paramagnétiques : l'air ($\chi = 3,8 \times 10^{-7}$), l'oxygène ($\chi = 2 \times 10^{-5}$), l'aluminium, le platine.

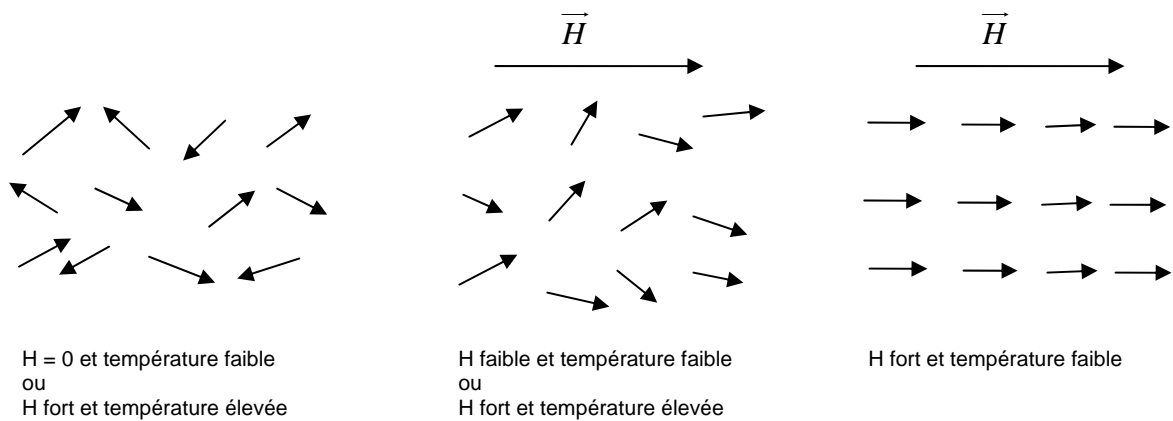


Figure 35
Action combinée de la température et de H extérieure sur un matériau paramagnétique. Les vecteurs symbolisent les courant magnétiques atomiques.

Le ferrimagnétisme

Ce sont des matériaux dans lesquels les domaines magnétiques sont subdivisés en régions qui peuvent être alignés dans le sens opposés les uns aux autres, mais dont le moment magnétique global n'est pas nul lorsque le champ extérieur est nul.

Il peut donc y avoir :

1. Un nombre égal de sous domaines de directions opposées mais l'alignement magnétique d'un sous-ensemble peut être plus fort que l'autre. C'est le cas de l'ilménite, de la magnétite, de la titanomagnétite et des oxydes de fer ou fer et titane.
2. Le nombre de sous domaines d'une direction est plus importante que le nombre dans l'autre direction. C'est le cas de la pyrrhotine.

Presque tous les matériaux magnétiques sont ferrimagnétiques.

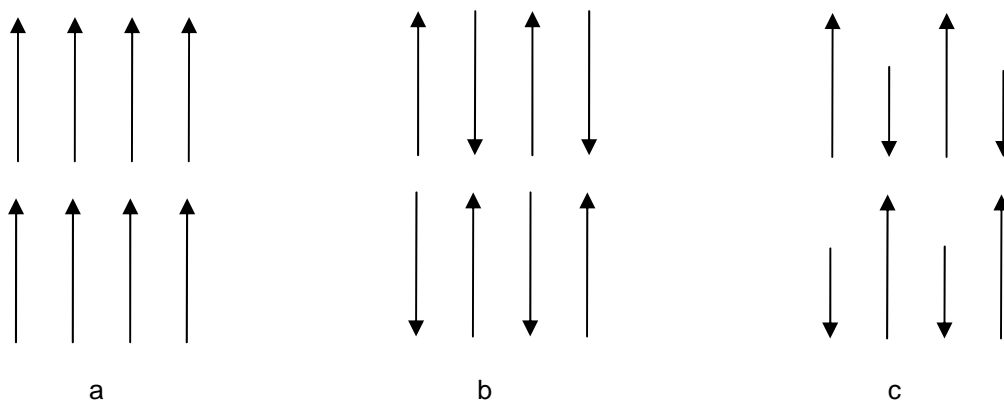


Figure 36
**Répartition des moments magnétiques élémentaires :
a. ferromagnétiques, b. antiferromagnétiques et c. ferrimagnétiques**

L'antiferromagnétisme

Lorsque la somme des moments magnétiques des sous-ensembles parallèles et antiparallèles est nulle dans un matériau qui autrement serait considéré comme ferromagnétique (Figure 36b), la susceptibilité résultante sera très faible, de l'ordre des substances paramagnétiques. Ces substances sont nommées antiferromagnétiques. L'hématite est un minéral possédant cette propriété.

Le ferromagnétisme

Les matériaux ferromagnétiques possèdent une susceptibilité magnétique χ extrêmement grande et variable. La magnétisation d'un matériau ferromagnétique correspond à l'orientation des dipôles élémentaires dans une même direction. À la différence des paramagnétiques, cette orientation peut se faire spontanément, en l'absence d'une excitation \vec{H} extérieure.

La région de l'espace dans laquelle tous les moments magnétiques sont orientés selon une même direction s'appelle un domaine (de Weiss) et les limites entre ces domaines, des parois (de Bloch).

Si on place un matériau ferromagnétique dans une excitation \vec{H} extérieure, les parois vont se déplacer de manière à renforcer l'excitation \vec{H} extérieure. Si \vec{H} augmente beaucoup, le domaine favorablement orienté occupera tout le volume du matériau qui est alors magnétisé à saturation.

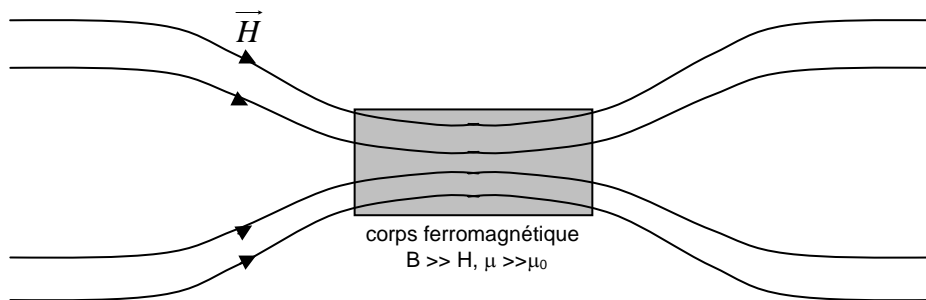


Figure 37
Comportement d'un matériau ferro ou ferrimagnétique dans une excitation magnétique H

Exemples de matériaux paramagnétiques : le fer (Fe) et la magnétite (Fe_3O_4), le cobalt (Co), le nickel (Ni) et certains de leurs alliages (aciers, ferronickels, ferrites). Les ferrites sont des matériaux pratiquement isolants, ce sont des composés dont la formule générale est XFe_2O_4 où X représente un métal bivalent comme le cobalt, le nickel, le cuivre ou le zinc.

Pour les matériaux paramagnétiques et diamagnétiques, on peut négliger χ devant 1 et considérer ces matériaux comme équivalents au vide du point de vue magnétique (perméabilité μ_0). Ce sera le cas des "entrefers" de machines électriques par exemple.

Par contre, pour les matériaux ferromagnétiques, c'est 1 qui est négligeable devant χ , et χ est alors pratiquement égal à la perméabilité relative $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$, celle-ci atteignant couramment des valeurs de l'ordre de 5000.

Théorie des domaines élémentaires de Weiss

L'expérience montre que tous les matériaux magnétiques de volume suffisant se divisent spontanément en régions plus petites (environ 10^{-9} cm^3) que l'on appelle des domaines élémentaires. A l'intérieur d'un domaine tous les moments magnétiques atomiques sont maintenus parallèles de telles sortes que chaque domaine se présente comme un petit volume aimanté à saturation. Les domaines diffèrent par l'orientation du vecteur résultant \vec{B} de chacun d'eux. Vu de l'extérieur, l'aimantation est une grandeur statistique.

Historiquement, l'idée d'une structure en domaine a été introduite pour la première fois par Pierre Weiss en 1907.

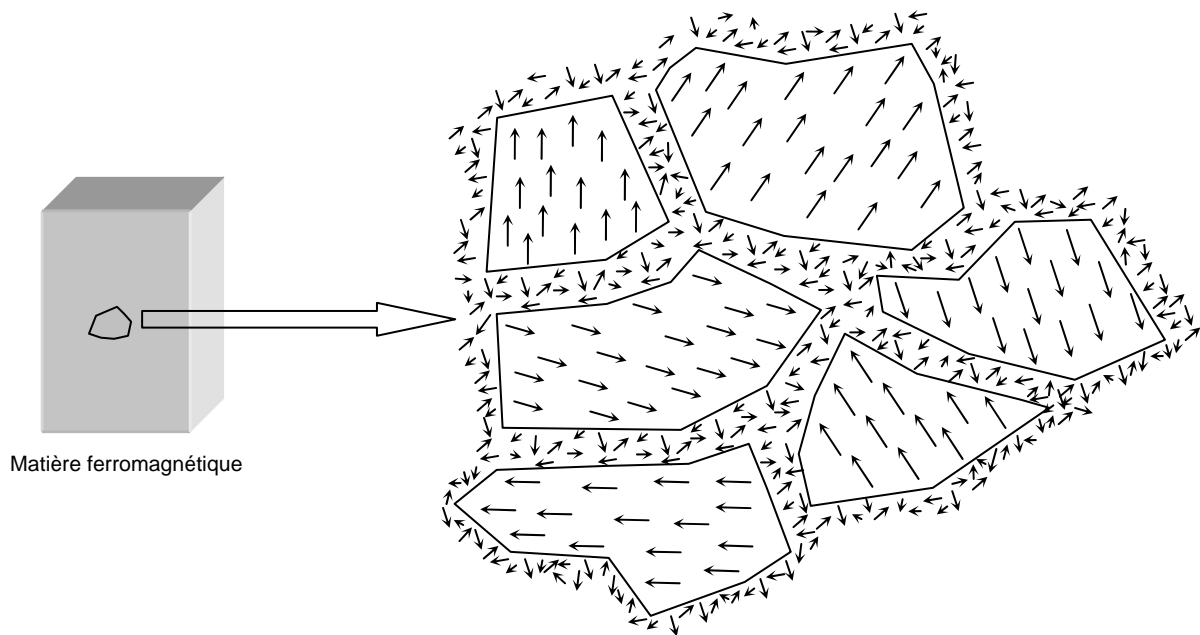


Figure 38

Domaines magnétiques de Weiss dans une substance ferromagnétique. Dans chaque domaine, les moments magnétiques atomiques tendent à être alignés. Les parois (de Bloch) séparant les domaines sont des zones étroites où les moments atomiques ne sont pas alignés.

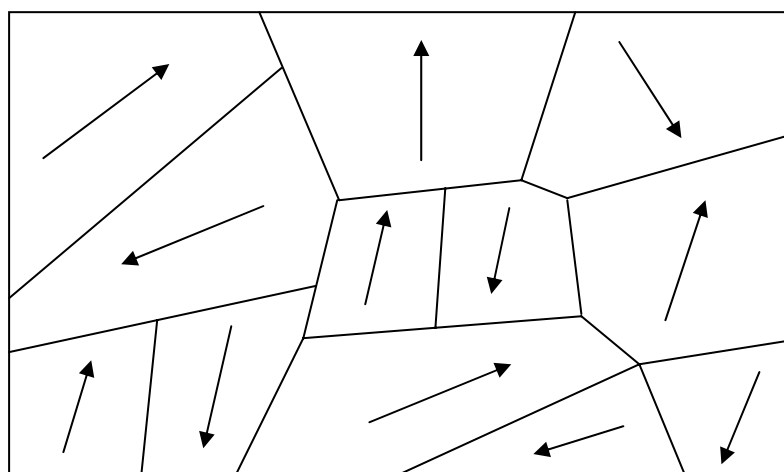


Figure 39

Interaction des joints de grain et des parois de Bloch. Les vecteurs à l'intérieur des domaines de Weiss indiquent la direction de la magnétisation dans le domaine.

Lorsque \vec{H} augmente à partir de zéro, les parois de Bloch se déplacent, entraînant une magnétisation de l'échantillon et donc un champ \vec{B} non nul. Quand \vec{H} est suffisamment intense, un seul domaine occupe tout l'échantillon. Le champ B_s (B saturation) est donc le champ d'induction maximal de l'échantillon.

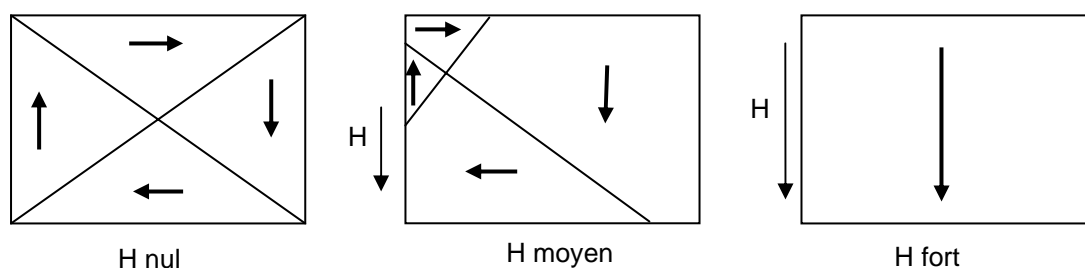


Figure 40

Déplacement des parois de Bloch sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Si le champ magnétique appliqué est suffisamment intense, un seul domaine occupera tout le matériau

Si on diminue \vec{H} , on oblige les parois à se déplacer de nouveau. Le mouvement de retour n'est pas le même que celui suivi lorsque \vec{H} augmentait parce qu'une partie du mouvement des parois est irréversible.

La magnétisation qui reste lorsque $\vec{H} = 0$ s'appelle magnétisation rémanente (B_r).

Le champ nécessaire pour ramener B à zéro s'appelle le champ coercitif.

La surface de la boucle d'hystérésis représente l'énergie perdue lors du déplacement irréversible des parois. La perméabilité magnétique des milieux ferromagnétiques est très élevée et variable. L'état magnétique de tels matériaux est défini par une courbe représentant B en fonction de H dite courbe de magnétisation (Figure 41).

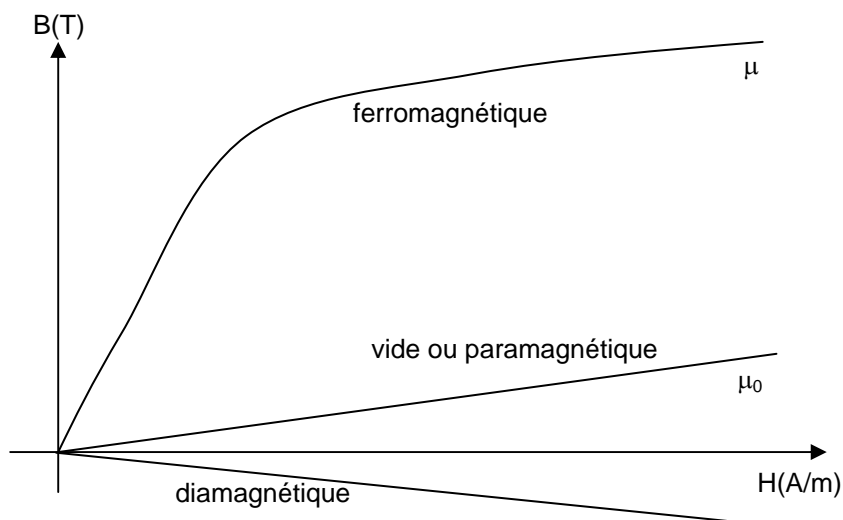


Figure 41
Courbe de magnétisation

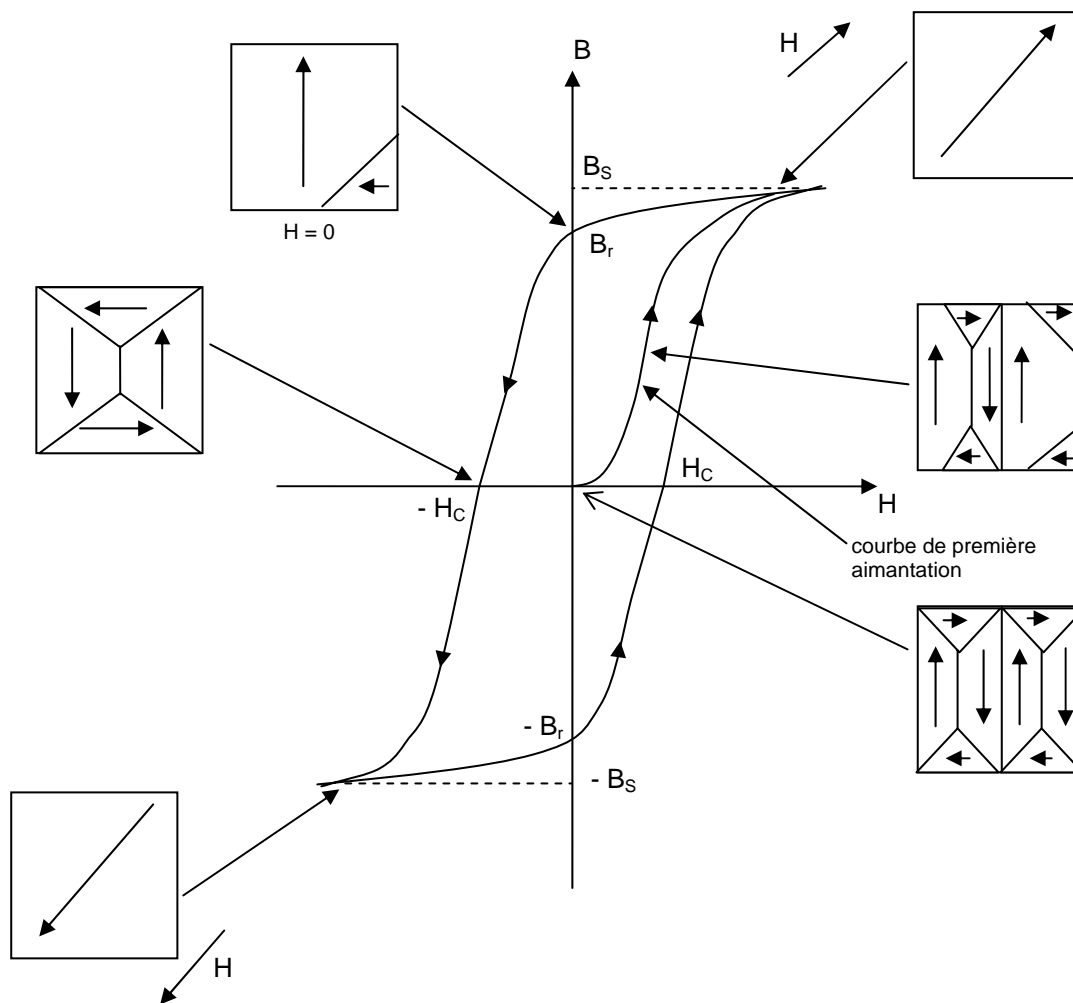


Figure 42

Courbe d'aimantation d'un matériau ferromagnétique. B_s représente le champ d'induction magnétique à saturation, B_r le champ d'induction rémanent et H_c le champ magnétique coercitif.

Le cycle de la Figure 42 est appelé cycle d'hystérésis, du grec husterêsis retard, en effet B suit H avec un certain retard. La réorganisation des parois de Bloch provoque de l'agitation au sein des atomes et donc de la chaleur. La chaleur, les pertes par hystérésis sont proportionnelles à la surface du cycle et au nombre de fois que ce cycle est effectué par seconde dans le cas où H est produit par un courant alternatif.

Les métallurgistes ont mis au point des tôles à cycle d'hystérésis très étroit et donc à faibles pertes : les tôles à grains orientés. Ces tôles contiennent 3 % de leur poids en silicium, moins riches en silicium, elles seraient moins performantes, plus riches on ne sait pas les fabriquer. Leur caractère spécifique réside dans leur texture cristalline : tous les cristaux cubiques que compte la tôle (ils sont de très grande taille, dépassant souvent un centimètre) possèdent des orientations très voisines. La direction de laminage, dans le plan de la tôle, est toujours très voisine d'une arête du cube (le cristal) qui est aussi la direction d'aimantation facile. Il apparaît alors dans la tôle une structure en domaines particulièrement intéressante, constituée de domaines principaux réguliers en bandes parallèles, d'aimantations alternées, séparées par des parois de Bloch à 180° très mobiles. Cette tôle acquiert donc très facilement une aimantation importante parallèlement à sa direction de laminage et ses pertes sont faibles. On les utilise surtout dans la construction des circuits magnétiques des transformateurs. La découverte de ces tôles remonte à 1934. Les recherches dans ce domaine se poursuivent toujours.

Circuits magnétiques

Dans une machine électrique, l'obtention d'un couple moteur élevé est subordonné à l'existence de forces de Laplace elles mêmes importantes. Ainsi, on cherche à créer un champ magnétique intense dans l'entrefer, au niveau des conducteurs sur lesquels doivent s'exercer les forces de Laplace. L'acheminement des lignes de champ, de leur zone de production (bobines inductrices), vers l'entrefer sans atténuation notable est assuré par le circuit magnétique de la machine. De même que l'on emploie du cuivre ou de l'aluminium pour confectionner des conducteurs de l'électricité, on emploie des matériaux ferromagnétiques pour conduire les lignes de champ magnétique.

L'importance des matériaux ferromagnétique en électrotechnique provient du fait qu'ils sont capables de canaliser et de capter en leur sein le flux de toute induction due à des courants situés dans leur voisinage et, en particulier, enroulés autour d'eux.

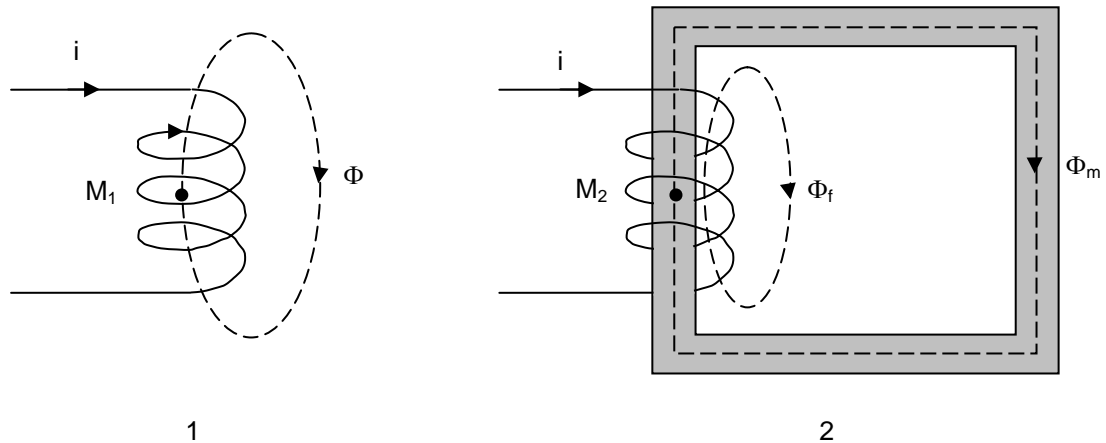


Figure 43
Canalisation du flux

Considérons un circuit électrique bobiné dans l'air et le même circuit bobiné autour d'un noyau ferromagnétique (Figure 43). Dans les deux cas, les excitations magnétiques aux points M_1 et M_2 sont du même ordre de grandeur. Elles dépendent des paramètres géométriques de la bobine pour le circuit n°1 et en plus de la longueur du noyau dans le circuit n°2.

Considérons le champ magnétique :

Au point M_1 , dans l'air, il vaut : $B = \mu_0 H$

Mais en M_2 , il vaut $B = \mu_r \mu_0 H$, c'est-à-dire que le champ est μ_r fois plus grand. Etant donné que μ_r atteint des valeurs comprises couramment entre 1000 et 5000, on voit que le champ B dans le matériau ferromagnétique sera 1000 à 5000 fois plus grand que dans l'air. On pourra considérer que la majeure partie du flux est canalisée dans le noyau.

Champ dans un entrefer

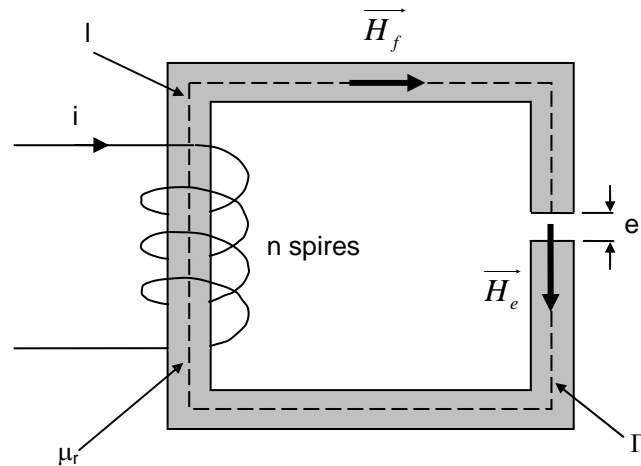


Figure 44
Champ dans un entrefer

Considérons un noyau de section constante S , de perméabilité magnétique supposée constante μ_r , dans lequel on a usiné une ouverture de longueur e (l'entrefer).

En appliquant le théorème d'Ampère au contour Γ et en prenant en compte le fait que l'excitation magnétique prend deux valeurs différentes : H_f à l'intérieur du fer et H_e dans l'entrefer, il vient :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_f \cdot l + H_e \cdot e = n \cdot i \quad (1.30)$$

En supposant que le flux Φ est le même dans le noyau et dans l'entrefer :

$$B_f = \frac{\Phi}{S} = B_e, \text{ d'où :}$$

$$\mu_0 \mu_r H_f = \mu_0 H_e \quad (1.31)$$

Les deux relations (1.30) et (1.31) permettent de calculer les champs :

$$\boxed{\begin{aligned} H_f &= \frac{ni}{l + \mu_r e} \\ H_e &= \mu_r \frac{ni}{l + \mu_r e} \end{aligned}} \quad (1.32)$$

On constate que c'est désormais l'excitation magnétique dans l'entrefer, H_e , qui est μ_r fois plus grande que l'excitation dans le fer, H_f : tout ce passe comme si on avait concentré dans le petit espace de l'entrefer l'excitation due au courant i .

L'induction B (qui est la même partout) peut se calculer par la relation :

$$\boxed{\frac{B}{\mu_0} \left(e + \frac{l}{\mu_r} \right) = ni} \quad (1.33)$$

Dans la pratique, la perméabilité relative μ_r n'est pas constante (c'est une fonction de B , qui dépend de l'état de saturation du noyau). On ne peut donc pas utiliser directement la relation (1.33) pour calculer B ou les relations (1.32) pour calculer H_e ou H_f .

Relation de Hopkinson

On peut utiliser l'analogie dite "analogie de Hopkinson" (ou encore loi d'Hopkinson) pour la mise en équation des circuits magnétiques afin de calculer les ampères tours nécessaires pour l'obtention d'un champ B donné ou inversement. Cette analogie ramène le calcul d'un circuit magnétique au calcul d'un circuit électrique, en considérant des quantités équivalentes. Il suffit, dès lors, d'appliquer les lois de Kirchhoff.

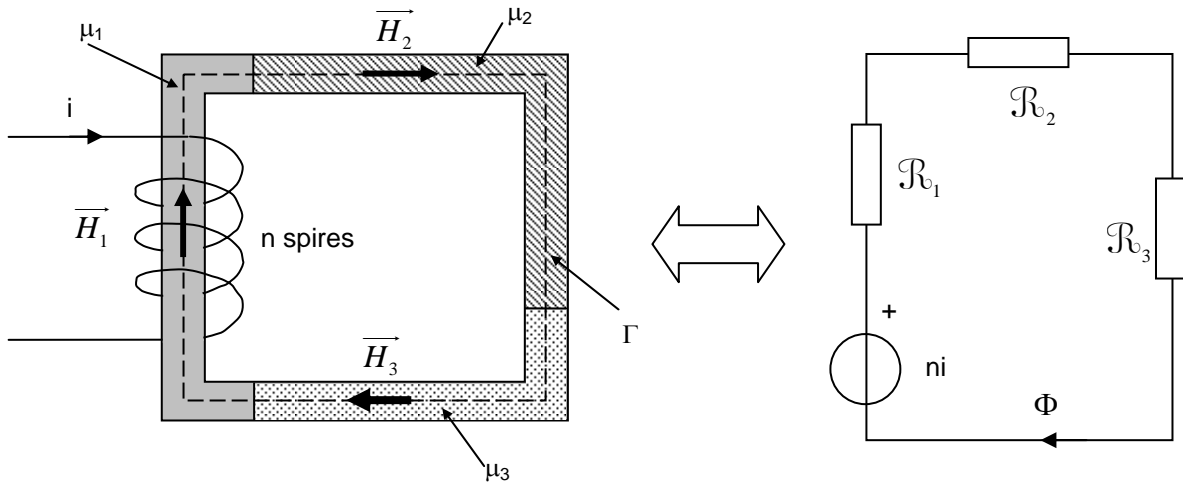


Figure 45
Circuit magnétique à 1 maille non homogène et son équivalent électrique

Considérons le circuit magnétique de la Figure 45, ce circuit possède une seule maille constitué de trois matériaux différents, de perméabilité magnétique μ_1 , μ_2 , et μ_3 . Le théorème d'Ampère appliqué au contour Γ donne :

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 = ni \quad (1.34)$$

On peut écrire cette relation en introduisant le flux Φ qui traverse le circuit : ce flux étant le même pour tout le noyau, le champ qui en résulte sera le même si la section est constante :

$$B = \frac{\Phi}{S} = \mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 = \mu_3 H_3$$

La relation (1.34) peut donc s'écrire :

$$\left(\frac{l_1}{\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S} + \frac{l_3}{\mu_3 S} \right) \Phi = ni$$

En appelant réluctance d'une portion de circuit magnétique de longueur l et de section S la grandeur

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}} \quad (1.35), \text{ grandeur analogue à la résistance ohmique d'un fil de longueur } l \text{ et de section } S$$

($R = \rho \cdot \frac{l}{S}$), il vient :

$$\boxed{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3) \Phi = ni} \quad (1.36) \Leftrightarrow (R_1 + R_2 + R_3) I = E$$

Cette relation est une forme analogue à la loi d'Ohm pour un circuit électrique à une maille :

- la f.é.m. E est analogue à la f.m.m. (force magnétomotrice) ni ,
- l'intensité du courant électrique est analogue au flux Φ ,
- la résistance électrique est analogue à la réluctance \mathcal{R} du circuit magnétique.

Analogie de Hopkinson :

Quantité magnétique			Quantité électrique		
Force magnétomotrice	ni	At	Force électromotrice	E	V
Flux	Φ	Wb	Courant	I	A
Réluctance	\mathcal{R}	At/Wb	Résistance	R	Ω
Potentiel magnétique	U	At	Potentiel électrique	V	V

Cette analogie est un guide pratique lorsque l'on peut considérer la perméabilité magnétique μ comme constante (résistance électrique constante).

Exemple :

Considérons le circuit magnétique de la Figure 46. On suppose que le matériau garde une perméabilité relative constante $\mu_r = 2000$.

La branche de droite comporte un entrefer d'épaisseur $BC = 0,3 \text{ mm}$ et les 1000 spires sont parcourues par une intensité de $0,8 \text{ A}$. On demande de calculer le champ B dans l'entrefer.

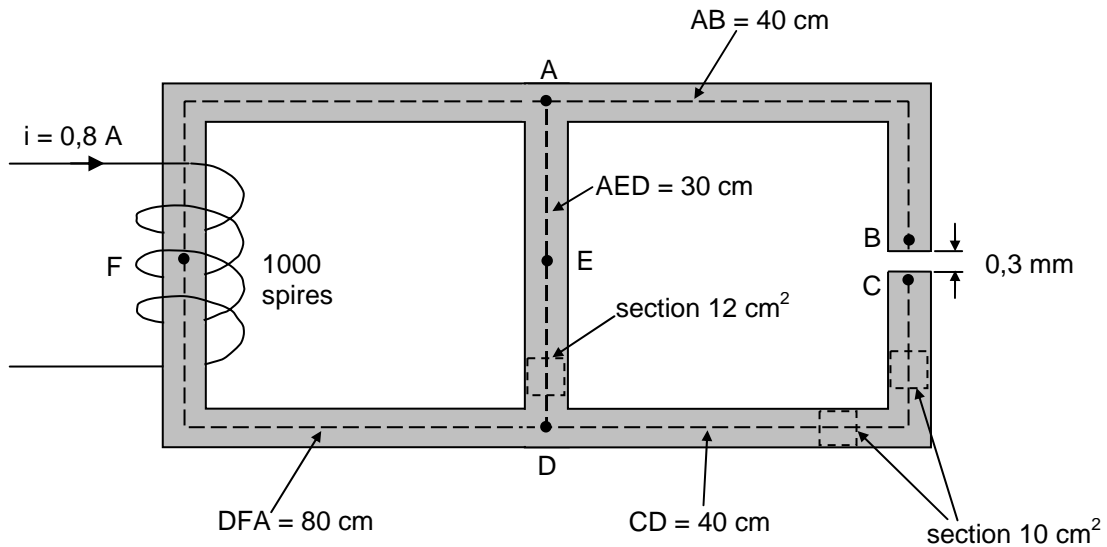


Figure 46
Exemple de circuit magnétique à 2 mailles

L'application de la loi d'Hopkinson montre que ce circuit magnétique se comporte comme le circuit électrique de la Figure 47.

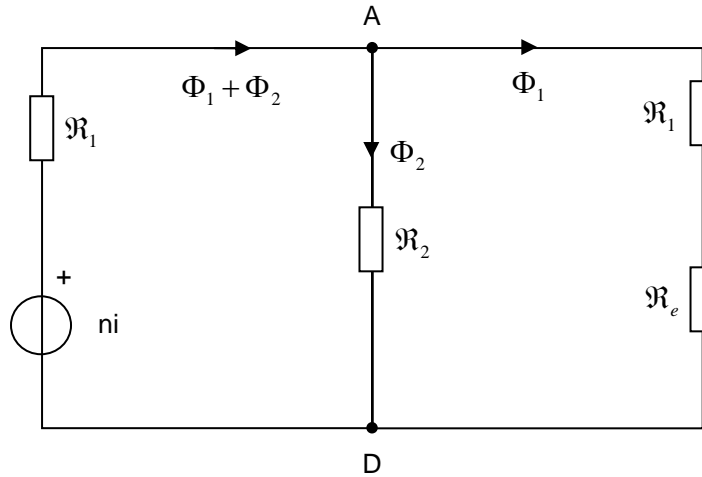


Figure 47

\mathcal{R}_1 représente la réluctance des branches DFA ou AB + CD (de même longueur 80 cm, et de même section 10 cm^2);

\mathcal{R}_2 représente la réluctance de la branche centrale AED;

\mathcal{R}_e représente la réluctance de la branche BC (entrefer).

Les équations du circuit de la Figure 47, déduites des lois de Kirchoff sont :

$$ni = \mathcal{R}_1(\Phi_1 + \Phi_2) + \mathcal{R}_2\Phi_2 \quad (1.37)$$

$$\mathcal{R}_2\Phi_2 = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_e)\Phi_1 \quad (1.38)$$

Calculons les réluctances :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{0,8}{4\pi \times 10^{-7} \times 2000 \times 10 \times 10^{-4}} = 3,18 \times 10^5 \text{ At/Wb}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{0,3}{4\pi \times 10^{-7} \times 2000 \times 12 \times 10^{-4}} = 9,95 \times 10^4 \text{ At/Wb}$$

$$\mathcal{R}_e = \frac{0,3 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 10^{-4}} = 2,38 \times 10^5 \text{ At/Wb}$$

La relation (1.38) donne alors : $\Phi_2 = 5,6 \cdot \Phi_1$, soit, d'après la relation (1.37) où on connaît $ni = 800$:

$$\Phi_1 = 0,3 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = 1,68 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

On en déduit le champ $B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = 1,4 \text{ T}$ à l'intérieur de la branche centrale AD, et le champ

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = 0,3 \text{ T} \text{ dans l'entrefer (égale au champ dans la branche de droite AB, BC, BD).}$$

Calcul des circuits magnétiques

Le calcul d'un circuit magnétique est la détermination de la f.m.m. (force magnétomotrice) nécessaire pour produire un flux donné dans une partie de la carcasse d'une machine électrique ou encore la détermination du flux qui y est produit par une f.m.m. donnée (problème inverse).

En général, les dimensions géométriques du circuit sont des données, ainsi que la nature du matériau, c'est-à-dire sa courbe de magnétisation, soit sous la forme $B(H)$, soit sous la forme $\mu_r(B)$, soit encore sous la forme $\Phi(ni)$.

Première catégorie de calcul : connaissant Φ , calculer ni

Pour calculer les f.m.m. (ou ampères-tours) à partir des flux, le principe de calcul est de déduire successivement :

1. Les inductions dans les diverses parties du circuit, qui dépendent de leurs sections et des flux qui les traversent : $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$, $B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}$, etc.
2. Les champs, à partir des inductions, soit par la relation connue $B(H)$ dans le matériau, soit par $H = \frac{B}{\mu_0}$ dans l'air.
3. Les ampères-tours "partiels" $H_1 l_1$, $H_2 l_2$, etc. nécessaires pour magnétiser les différentes parties.

Si le circuit ne comporte qu'une maille, la f.m.m. totale sera égale à la somme des ampères-tours partiels :

$$ni = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots \quad (1.39)$$

Entrefer

Dans un entrefer d'épaisseur e , le tube de champ canalisé par le matériau ferromagnétique s'élargit, $S_e > S$ et le champ B s'affaiblit. En effet :

$$\Phi_e = \Phi \Rightarrow B_e \times S_e = B \times S \Rightarrow B_e < B \text{ car } S_e > S$$

B_e champ magnétique dans l'entrefer
 B champ magnétique dans le matériau
 S section droite du circuit magnétique
 S_e aire maximum du tube de champ dans l'entrefer.

Si l'entrefer possède une épaisseur faible (on admettra

que cela correspond à : $e \times e < \frac{S}{10}$), alors on négligera

la dispersion des lignes de champ et on admettra que la section du tube de champ demeure inchangée dans le matériau et dans l'entrefer. On admettra alors :

$S_e = S \Rightarrow B_e = B$. Attention, cependant :

$$H_e \neq H \text{ car } H_e = \frac{B_e}{\mu_0} \text{ et } H = \frac{B}{\mu}$$

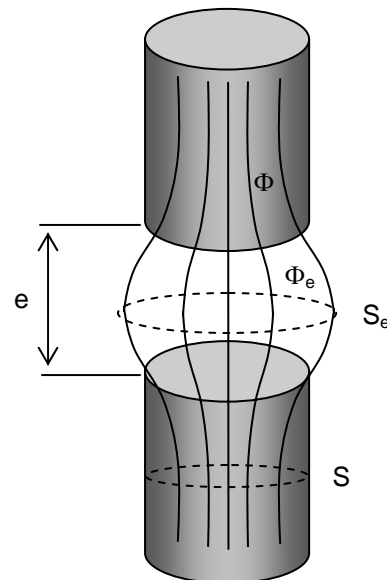


Figure 48

Exemple n°1 : circuit magnétique d'une machine à courant continu à 4 pôles

Considérons le circuit magnétique représenté à la Figure 50 . L'armature est en acier au silicium, la carcasse et les noyaux (qui portent les bobines inductrices) sont en acier doux ordinaire. Les dimensions sont données sur la figure Figure 50, on connaît le nombre de spires de **chaque** bobine : $n = 1200$. On demande de calculer le courant d'excitation nécessaire dans ces bobines afin de créer un flux par pôle de $0,06 \text{ Wb}$. Les courbes de magnétisation $B(H)$ sont données Figure 49 et on suppose qu'on peut négliger les fuites de flux.

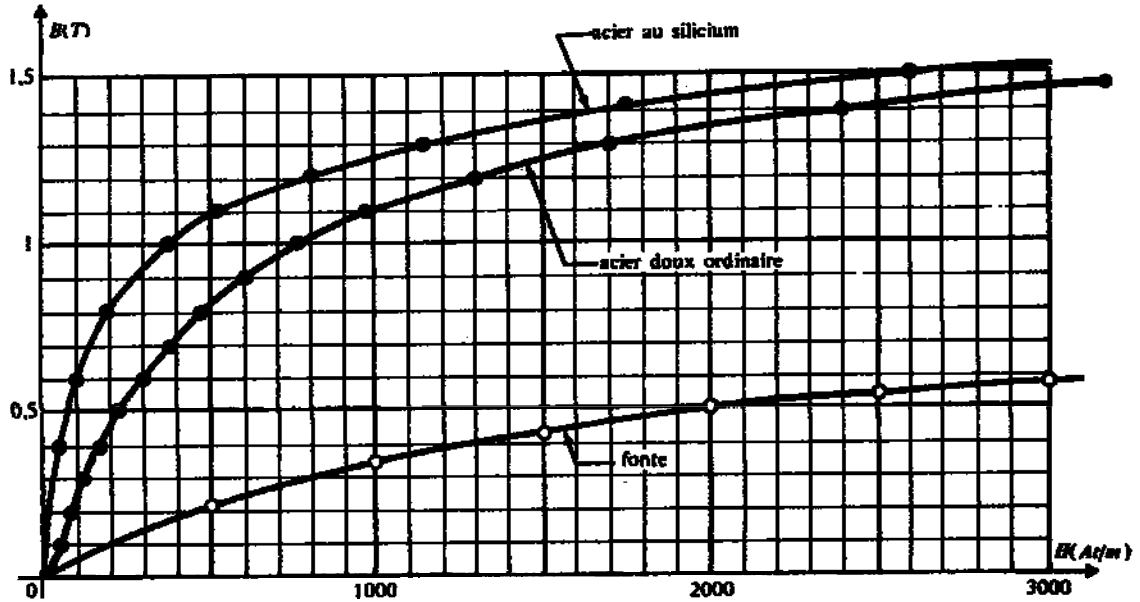


Figure 49

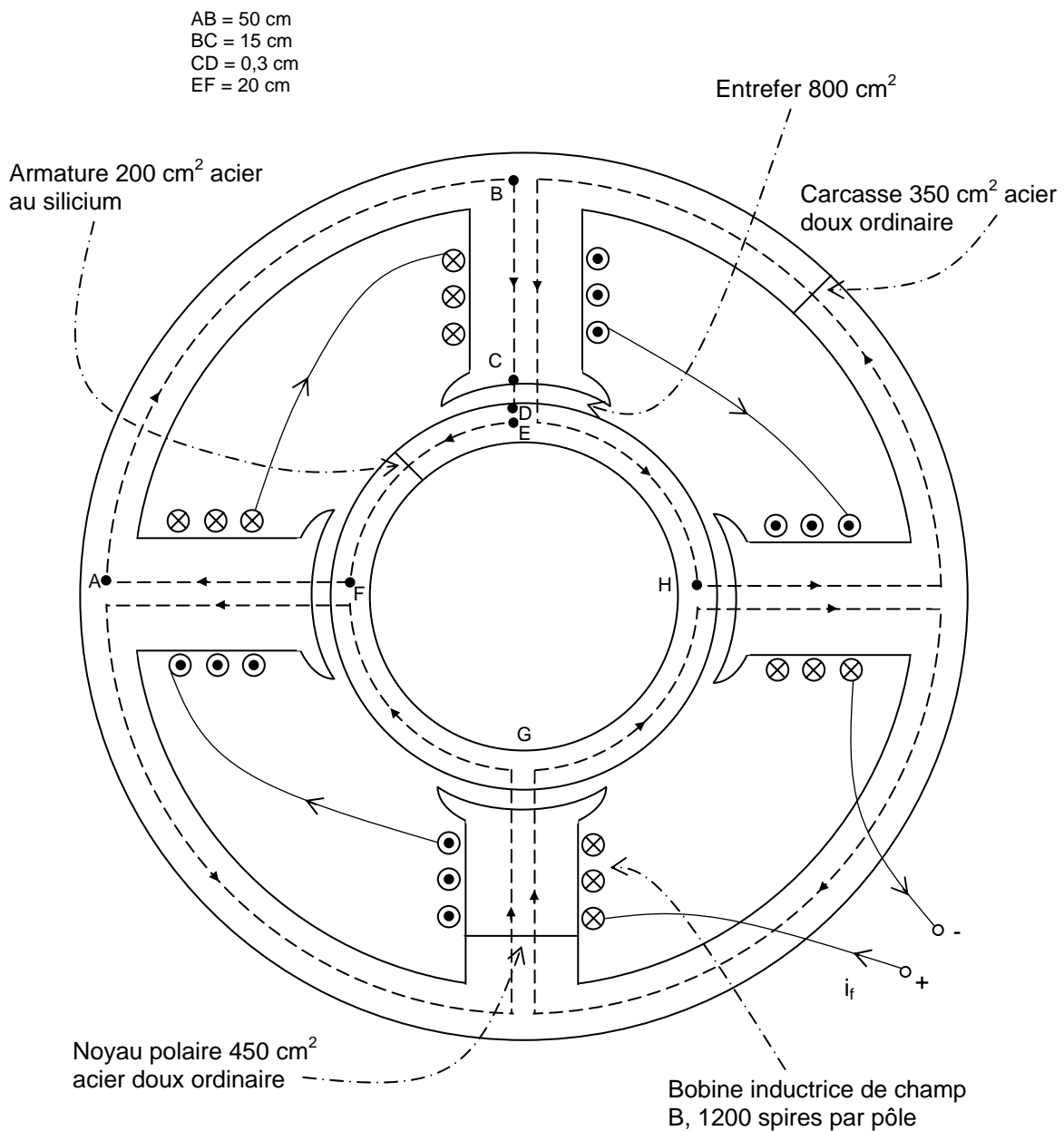


Figure 50

Considérons une ligne de flux entre deux pôles adjacents, telle que ABCDEF :

le flux de 0,06 Wb qui circule dans l'entrefeer CD (flux par pôle) se répartit en deux parties égales, à gauche le long de EF, et à droite le long de EH. Le flux qui circule dans l'armature le long de EF n'est que de 0,03 Wb. Il en est de même dans la partie AB de la carcasse.

Par contre, dans la partie BC du noyau, le flux est de 0,06 Wb puisqu'il s'y ajoute le flux venant du circuit de droite : c'est le flux créé par le noyau sous chaque pôle, le "flux par pôle".

Connaissant les sections des différentes parties, on peut y calculer les inductions :

$$\text{Dans chaque entrefeer } B = \frac{0,06}{0,08} = 0,75 \text{ T}$$

$$\text{Dans l'armature } B = \frac{0,03}{0,02} = 1,5 \text{ T}$$

$$\text{Dans la carcasse } B = \frac{0,03}{0,035} = 0,86 \text{ T}$$

Dans chaque noyau $B = \frac{0,06}{0,045} = 1,33 \text{ T}$

On en déduit les excitations magnétiques en considérant pour chaque partie la courbe de magnétisation correspondant au matériau :

Entrefer $H = \frac{B}{\mu_0} = 597000 \text{ At/m (air)}$.

Armature $H = 2600 \text{ At/m (courbe de l'acier au silicium)}$.

Carcasse $H = 560 \text{ At/m (courbe de l'acier doux ordinaire)}$.

Noyau $H = 1900 \text{ At/m (courbe de l'acier doux ordinaire)}$.

D'où les ampères-tours partiels nécessaires pour magnétiser chaque partie, connaissant leurs longueurs :

Deux entrefers : $Hl = 2 \times 597000 \times 3 \times 10^{-3} = 3580 \text{ At}$.

Armature : $Hl = 2600 \times 0,2 = 520 \text{ At}$.

Carcasse : $Hl = 560 \times 0,5 = 280 \text{ At}$.

Deux noyaux : $Hl = 2 \times 1900 \times 0,15 = 570 \text{ At}$

En appliquant la relation (1.39), on en déduit la f.m.m. nécessaire :

$ni = 3580 + 520 + 280 + 570 = 4950 \text{ At}$

Nous avons considéré un circuit à deux pôles adjacents, il faut, par pôle, 2475 At.

Comme chaque bobine comporte 1200 spires, il faut un courant "inducteur" :

$I_{\text{inducteur}} = \frac{2475}{1200} = 2,06 \text{ A}$

Si le circuit comporte plusieurs mailles, la f.m.m. totale sera encore calculée à partir des ampères-tours partiels, en faisant le calcul de proche en proche à partir du flux qui est donné.

Dans ce cas, il est intéressant d'introduire la notion de "potentiel magnétique" U commun à plusieurs branches, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple n°2 : circuit magnétique à deux mailles de perméabilité variable

Reprenons le circuit magnétique de la Figure 46 en supposant maintenant qu'il s'agisse de tôles en acier doux ordinaire dont on connaît la courbe de magnétisation B(H) Figure 49.

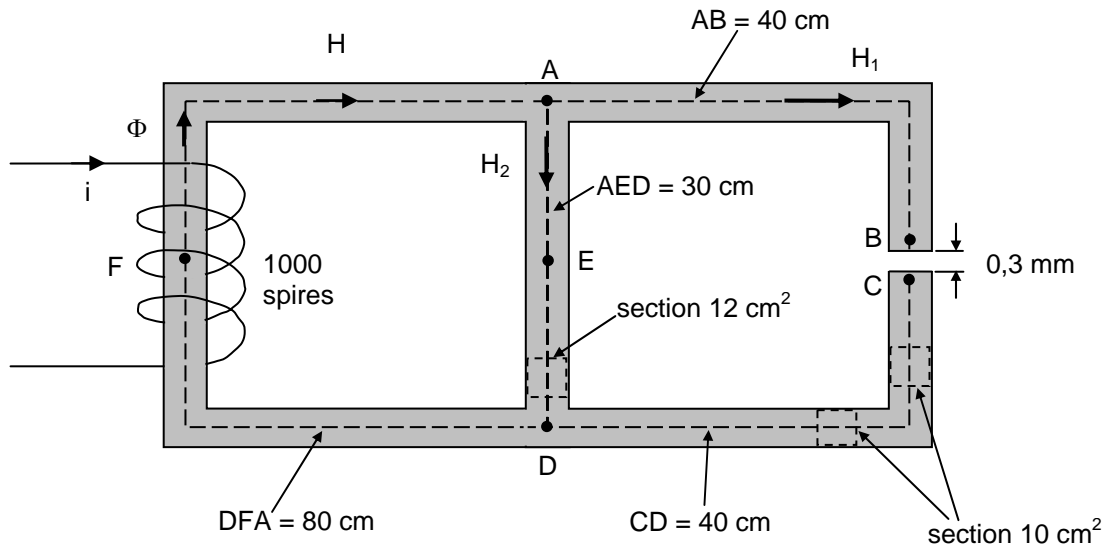


Figure 51

On suppose que le champ magnétique dans l'entrefer vaut $B = 0,3 \text{ T}$ et que la bobine comporte 1000 spires. On demande de calculer le courant i d'excitation correspondant.

On donne les valeurs numériques B(H) :

B (T)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
H(At/m)	50	80	110	160	220	300	380	490	600	760	980	1300	1700	2400	3300	4700	7500	11500

Les réluctances étant variables, l'analogie d'Hopkinson n'a plus d'intérêt. Il faut calculer la f.m.m. par l'intermédiaire des 4 champs H , H_1 , H_2 , H_e respectivement créés dans la branche de gauche, dans la branche de droite, dans la branche centrale et dans l'entrefer.

En introduisant le "potentiel magnétique" U entre les points A et D, on peut écrire les 2 équations du circuit sous la forme suivante :

$$ni = Hl + U \quad (1.40)$$

$$U = H_2 l_2 = H_1 l_1 + H_e e \quad (1.41)$$

On calcule alors les champs de proche en proche, en les déduisant des inductions d'après B(H), et en déduisant les inductions des flux.

On connaît ici le flux Φ_1 dans la branche de droite (de section constante 10 cm^2) :

$$\Phi_1 = B_1 \times S_1 = 0,3 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Le champ $B_1 = 0,3 \text{ T}$ étant le même dans l'entrefer et dans le fer de la branche de droite, on en déduit les excitations H_e et H_1 :

$$H_e = \frac{B_1}{\mu_0} = 239000 \text{ At/m (dans l'air).}$$

$$H_1 = 110 \text{ At/m (d'après le tableau B(H).)}$$

D'où le potentiel magnétique U , d'après (1.41) :

$$U = H_1 l_1 + H_e e = 88 + 72 = 160 \text{ At}$$

Le calcul de H nécessite la connaissance de Φ dans la branche de gauche. Calculons d'abord Φ_2 dans la branche centrale. L'excitation H_2 y vaut :

$$H_2 = \frac{U}{l_2} = \frac{160}{0,3} = 534 \text{ At/m}$$

Le champ B correspondant vaut $B_2 = 0,84 \text{ T}$ (d'après le tableau, en interpolant entre 0,8 et 0,9 T). On en déduit :

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 0,84 \times 12 \times 10^{-4} = 1,01 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Le flux Φ dans la branche de gauche vaut donc :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 1,31 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

On en déduit le champ $B_1 = 1,31 \text{ T}$ (surface constante de 10 cm^2), et l'excitation :

$H = 1770 \text{ At/m}$ (d'après le tableau, en interpolant).

On peut maintenant calculer la f.m.m. nécessaire d'après (1.40) :

$$ni = Hl + U = 1415 + 160 = 1575 \text{ At}$$

d'où le courant d'excitation nécessaire, puisque la bobine comporte 1000 spires :

$$i = 1,575 \text{ A}$$

On constate, en comparant avec l'exemple où on obtenait le même champ $B = 0,3 \text{ T}$ dans l'entrefer avec seulement $i = 0,8 \text{ A}$, qu'il faut un courant considérablement plus élevé lorsqu'on tient compte de la saturation du noyau.

Deuxième catégorie de calcul : connaissant ni , calculer Φ

Cette deuxième catégorie de problèmes est plus délicate. En effet, il peut sembler impossible de déterminer un flux à partir d'une relation du type :

$ni = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots) \Phi$ puisque les réluctances $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$, dépendent de la perméabilité, donc des champs B , donc du flux, qui est inconnu.

De même si on considère une relation du type :

$ni = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots$ les excitations H_1, H_2, \dots , dépendent des champs B , donc du flux qui est inconnu.

Il faut alors résoudre le problème par approximations successives (ou par itérations), en supposant connue à priori une valeur du flux, quelconque. On calcule la f.m.m. donnée. On en déduit une deuxième valeur du flux, plus probable, et on recalcule la f.m.m. etc, jusqu'à ce que la différence entre la f.m.m. calculée et la f.m.m. donnée soit inférieure à une précision que l'on s'est fixée à l'avance.

Si le circuit n'a qu'une maille, on peut déterminer simultanément le couple de valeurs ni et Φ qui satisfait la loi du circuit.

Exemple : "inducteur" avec entrefer

Soit un circuit magnétique en fonte, comportant un entrefer et excité par un courant de 1,3 A circulant dans une bobine de 1000 spires (Figure 52).

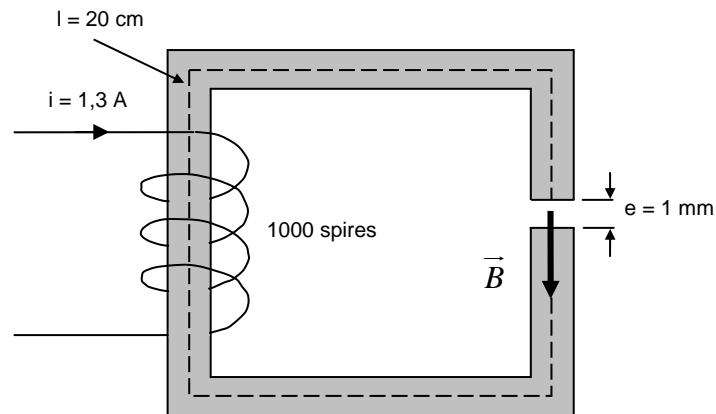


Figure 52

Calculer le champs B dans l'entrefer, sachant que la perméabilité relative de la fonte varie, en fonction de B selon le tableau suivant :

B(T)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
μ_r	480	350	300	250	200	150	120	110	90	50

En introduisant les réluctances, la loi du circuit s'écrit :

$$ni = \left(\frac{l_f}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{e}{\mu_0 S} \right) \Phi$$

Ou encore, en introduisant le champ B (section S supposée constante) :

$$ni = \left(\frac{l_f}{\mu_0 \mu_r} + \frac{e}{\mu_0} \right) B$$

Soit, avec les valeurs numériques données :

$$\frac{1,3 \times 1000}{800000 \times 0,001} = 1,63 = \left(\frac{200}{\mu_r} + 1 \right) B$$

On voit que B et μ_r , reliés par la relation $\mu_r(B)$ du tableau donné, doivent satisfaire simultanément cette équation; on procède alors en faisant des essais, à priori :

$$\text{Pour } B = 0,6 \text{ T : } 0,6 \left(\frac{200}{150} + 1 \right) = 1,4$$

Cette valeur est trop faible, 1,4 étant inférieur à 1,63.

$$\text{Pour } B = 0,7 \text{ T : } 0,7 \left(\frac{200}{120} + 1 \right) = 1,87$$

Cette valeur est trop importante.

On obtient donc, en interpolant entre ces deux valeurs : $B = 0,65 \text{ T}$.

Exercices

1. Calculer la F.M.M. requise pour créer un champ magnétique de 0,7 T dans un entrefer dont la longueur est de 2 mm (voir Figure 53).

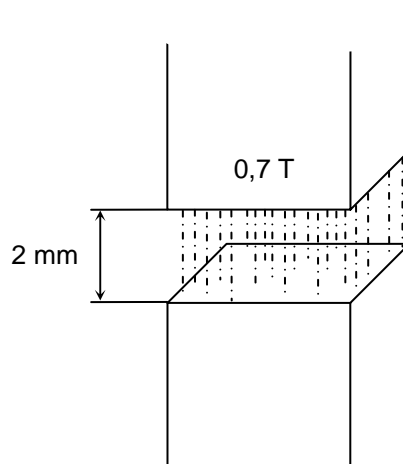


Figure 53

La F.M.M. nécessaire est telle que : $H.l = ni \Rightarrow ni = \frac{B}{\mu_0} \cdot l = 0,7 \times 800000 \times 0,002 = 1120 \text{ A.t}$

Il faudra donc enrouler autour du circuit magnétique 1120 spires parcourues par un courant de 1 A, ou encore 560 spires parcourues par 2 A, ou encore 2240 spires parcourues par 0,5 A, etc.

2. Soit le noyau d'un transformateur composé de tôles d'acier au silicium (1%). Les dimensions sont données à la Figure 54. La longueur moyenne du circuit magnétique est de 1,5 m. Quelle doit être la force magnétomotrice (F.M.M.) de la bobine si on souhaite obtenir un flux de 12 mWb dans le noyau ?

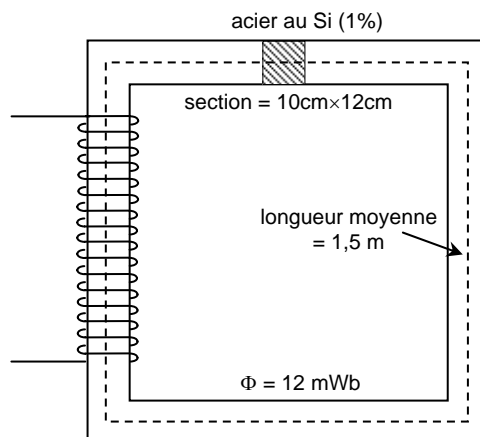


Figure 54

On pourrait effectuer le calcul en utilisant la formule : $\Phi = \frac{FMM}{\mathfrak{R}}$, ce qui exigerait le calcul de la

réductance \mathfrak{R} de ce circuit. Pour obtenir cette réductance, il faudrait connaître la valeur de la perméabilité μ_r de l'acier pour une excitation magnétique donnée.

On évite tous ces calculs en employant la courbe d'aimantation de la Figure 49 où on considère que l'on a à faire à de l'acier à 1%.

Celle-ci donne immédiatement l'excitation magnétique H requise pour produire le flux.

La section du noyau est : $S = 10 \times 12 = 120 \text{ cm}^2 = 0,012 \text{ m}^2$

$$\text{On trouve } B : B = \frac{\Phi}{S} = \frac{0,012}{0,012} = 1 \text{ T}$$

En se référant à la Figure 49, on voit qu'il faut une excitation magnétique $H = 375 \text{ A.m}^{-1}$ pour produire 1 T. La bobine doit donc produire une F.M.M. de 375 A pour chaque mètre du circuit magnétique. La longueur moyenne du circuit magnétique étant de 1,5 m, il faudra donc une

$$FMM = 375 \times 1,5 \approx 563 \text{ A.t}$$

3. Calculer maintenant la F.M.M. requise pour faire circuler le même flux (12 mWb) dans le noyau de l'exercice 2. après que l'on ait créé un entrefer de 1,5 mm de long (Figure 55).

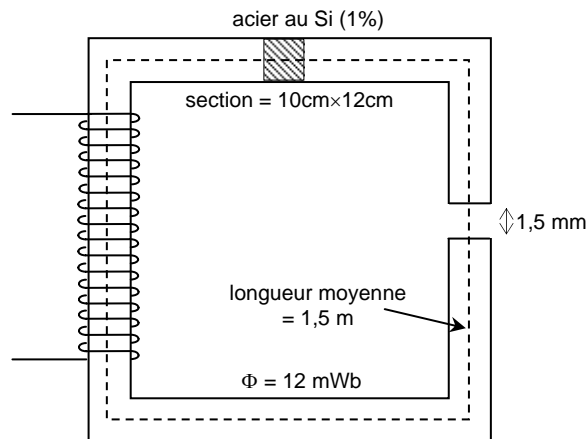


Figure 55

Il s'agit d'un groupement magnétique en série, car deux chemins de réluctance différente (acier et air) sont traversés par un même flux (analogie avec deux résistances disposées en série).

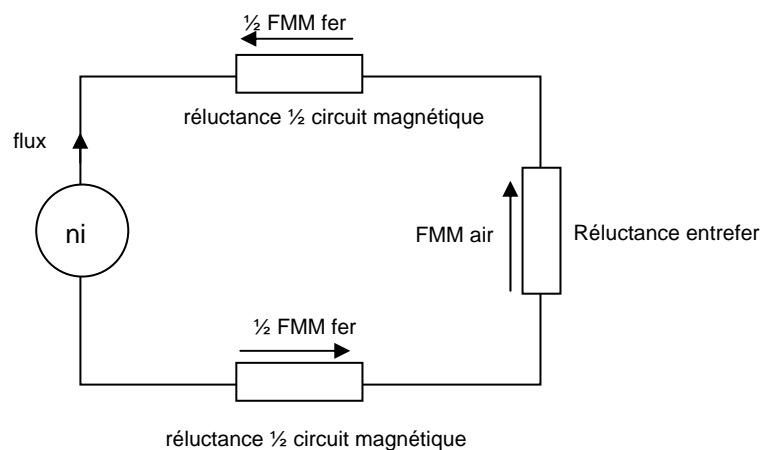


Figure 56

La F.M.M. « ni » créée par la bobine est « consommée » par les chutes de « tension magnétique » dans chacun des chemins (Figure 56), tout comme la tension U appliquée à un circuit électrique est consommée par les chutes de tensions successives de tension dans les résistances en série. La F.M.M. de la bobine est donc la somme des F.M.M. nécessaires pour l'air et pour l'acier.

F.M.M. pour l'air :

En supposant que, dans l'entrefer, toutes les lignes de champ suivent le même chemin qu'elles suivaient auparavant dans le fer (pas d'épanouissement du flux comme cela se produit à la Figure 48), le flux dans l'entrefer est le même que dans le noyau, donc le champ B également,

$$\text{soit } 1 \text{ T. } (\Phi_{\text{air}} = \Phi_{\text{fer}} \Rightarrow B_{\text{air}} \times S = B_{\text{fer}} \times S \Rightarrow B_{\text{air}} = B_{\text{fer}})$$

$$FMM_{\text{air}} = \mu_0 \cdot B \cdot l = 800000 \times 1 \times 0,0015 = 1200 \text{ A.t}$$

F.M.M. pour l'acier :

La longueur du chemin magnétique dans l'acier étant sensiblement la même qu'auparavant ($1,5 - 0,0015 = 1,4985 \text{ m}$ au lieu de $1,5 \text{ m}$), la F.M.M. requise est toujours de 563 A.t .

La F.M.M. de la bobine doit donc être :

$$FMM_{\text{bobine}} = 1200 + 563 = 1763 \text{ A.t}$$

Cet exemple montre l'importance des entrefers dans les circuits magnétiques. En effet, alors que dans ce cas, la longueur du chemin est 1000 fois plus grande dans l'acier que dans l'air, l'acier requiert environ 2 fois moins d'ampères-tours que l'air. Lorsque la longueur du chemin dans l'acier n'est pas trop grande par rapport à la longueur de l'entrefer, on peut négliger la F.M.M. nécessaire pour l'acier.

Dans les machines électriques, on cherche à garder l'entrefer entre le rotor et le stator aussi étroit que possible afin de réduire la F.M.M. que les pôles doivent développer. En effectuant une réduction de la F.M.M., on peut diminuer la grosseur des bobines, ce qui contribue à réduire les dimensions et le coût de la machine.

4. Calculer le flux dans le noyau en acier coulé de la Figure 57 et de la Figure 58. Le noyau possède une section de 30 cm^2 et une longueur de 40 cm . Les bobines 1 et 2 comptent, chacune, 20 spires et les courants sont respectivement de 70 A et de 30 A .

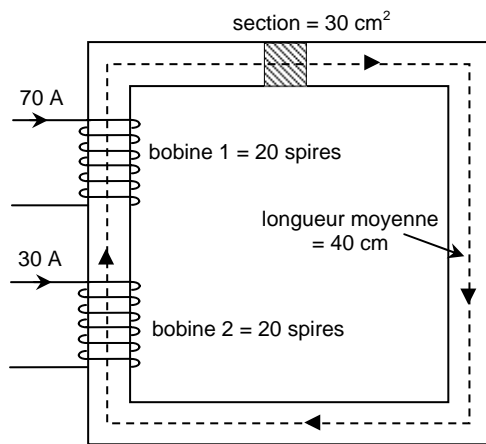


Figure 57

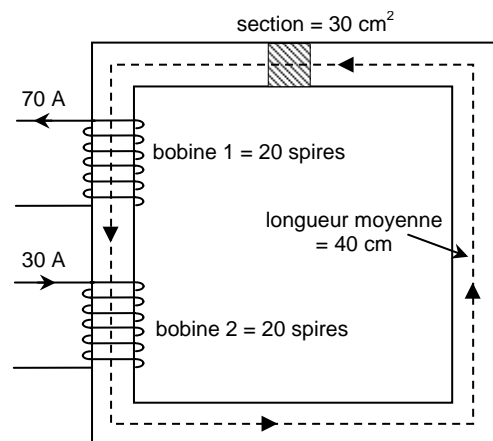


Figure 58

Pour la Figure 57 :

La F.M.M. de la bobine 1 vaut : $FMM = 70 \text{ A} \times 20 \text{ spires} = 1400 \text{ A.t}$

La F.M.M. de la bobine 2 vaut : $FMM = 30 \text{ A} \times 20 \text{ spires} = 600 \text{ A.t}$

La F.M.M. résultante est : $FMM_{1+2} = 1400 + 600 = 2000 \text{ A.t}$

L'excitation magnétique dans le circuit magnétique en acier coulé vaut donc :

$$H_{1+2} = \frac{2000}{0,40} = 5000 \text{ A.m}^{-1}$$

D'après le Tableau 1 de la page 70, on obtient (sans interpolation) : $|\vec{B}| = 1,6 \text{ T}$

Le flux dans le noyau est donc : $\Phi = B \cdot S = 1,6 \times 0,0030 = 4,8 \text{ mW}$

Pour la Figure 58 :

Les F.M.M. des bobines restent identiques. Cependant, elles agissent désormais en sens contraire.

La F.M.M. résultante est :

$$FMM_{1-2} = 1400 - 600 = 800 \text{ A.t}$$

L'excitation magnétique vaut donc : $H_{1-2} = \frac{800}{0,4} = 2000 \text{ A.m}^{-1}$

Le tableau nous donne un champ $|\vec{B}| = 1,35 \text{ T}$, en interpolant grossièrement.

Le flux dans le noyau est désormais de : $\Phi = B \cdot S = 1,35 \times 0,0030 = 4,05 \text{ mW}$

Le sens des flux est représenté sur la Figure 57 et sur la Figure 58. Bien entendu, le sens est inversé d'une figure à l'autre car, d'une part, la bobine 1 possède une F.M.M. supérieure à celui de la bobine 2 et, d'autre part, le courant qui la parcourt est inversé.

5. Un tore à section circulaire possède un diamètre intérieur de 40 cm et un diamètre extérieur de 60 cm. On enroule sur ce tore 400 spires d'un conducteur traversé par un courant de 1,96 A.

5.1. En supposant le tore constitué par de l'acier coulé, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du tore, la perméabilité magnétique du tore, et le flux qui le traverse.

5.2. Combien de spires traversées par le même courant seraient nécessaires pour obtenir le même flux utile :

5.2.1. si le tore est en fonte;(calculer la perméabilité relative de la fonte)

5.2.2. si le tore est en acier coulé, mais comporte un entrefer de 5 mm.

nota : On utilisera les courbes B(H) et μ (B) du tableau ci-dessous :

B(tesla)	H(A/m)			$\mu_r \approx 800000 \text{ B/H}$		
	acier coulé	fonte	tôles fer doux	acier coulé	fonte	tôles fer doux
0,1	50	200	25	1600	400	3200
0,2	80	410	40	2000	390	4000
0,3	115	750	50	2090	320	4800
0,4	160	1200	65	2000	270	4900
0,5	220	2000	80	1820	200	5000
0,6	300	3000	100	1600	160	4800
0,7	380	4200	130	1470	130	4300
0,8	490	6000	195	1300	110	3300
0,9	620	8500	265	1160	85	2700
1	760	12500	380	1050	65	2100
1,1	980	-	530	900	-	1650
1,2	1300	-	750	740	-	1300
1,3	1700	-	1100	620	-	950
1,4	2450	-	1700	460	-	660
1,5	3300	-	2600	350	-	460
1,6	4700	-	4000	270	-	320
1,7	7500	-	6300	180	-	210
1,8	11500	-	11500	130	-	130

Tableau 1

5.1. S'il n'y a pas de fuites, le flux (et donc le champs B) ont la même valeur dans toutes les sections du tore. D'après le théorème d'Ampère,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = N I \Rightarrow \frac{N I}{L} = \frac{400 \times 1,96}{\pi \times 0,5} = 500 \text{ A/m}.$$

Le tableau nous donne, correspondant à un champ de 500 a/m (acier coulé), B = 0,815 T (par interpolation).

D'où la perméabilité relative :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} \cdot \frac{0,815}{500} = 1300$$

Le flux correspondant est :

$$\Phi = BS = 0,815 \times \pi \times \frac{0,1^2}{4} = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

5.2.1. Si le tore est en fonte, le même tableau nous donne, correspondant à l'induction $B = 0,8 \text{ T}$, la valeur 6200 A/m . Il faut donc, si l'on fait passer un même courant dans les spires, multiplier leur nombre par : $62/5 = 12,4$, soit disposer $400 \times 12,4 = 4960$ spires.

Perméabilité relative de la fonte :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} \cdot \frac{0,815}{6200} = 104,6$$

5.2.2. Appliquons la loi d'Hopkinson :

$$F.M.M. = \Phi \times \sum \mathcal{R}_v = \frac{\Phi}{\mu_0} \times \left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} \right), \text{ indice 1 pour l'acier coulé, 2 pour l'air, avec :}$$

$$\Phi = 6,4 \times 10^{-3} \text{ Wb}, \quad l_1 = \pi \times 0,5 - 0,005 = 1,56 \text{ m}, \quad l_2 = 0,005 \text{ m}, \quad \mu_2 = 1 \text{ (air)}.$$

D'autre part, à $0,815 \text{ T}$ correspond pour l'acier coulé, une perméabilité relative de $\mu_r = 1300$.

On a donc, en désignant par n le nombre de spires :

$$F.M.M. = n \times 1,96 = \frac{6,4 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} \left(\frac{1,565}{1300 \times 78,5 \times 10^{-4}} + \frac{0,005}{78,5 \times 10^{-4}} \right) \Rightarrow 2052 \text{ spires.}$$

Si nous comparons le nombre d'ampère tours nécessaires pour maintenir $0,8 \text{ T}$ dans le tore à ce qui était nécessaire dans la question 1 pour le tore sans entrefer, on voit qu'il faut 4 fois plus de spires à cause d'un petit entrefer de 5 mm !

Hystérésis et bobine à noyau de fer

Lorsqu'on soumet un matériau ferromagnétique à une excitation magnétique alternative (variant entre deux valeurs opposées avec une certaine fréquence), il se produit un phénomène dit d'"hystérésis", dû au fait que les domaines (de Weiss) du métal présentent une certaine constante de temps avant de s'orienter. Il existe un retard entre l'application de l'excitation magnétique et l'apparition du champ magnétique.

Analyse du phénomène

Considérons un circuit bobiné sur une carcasse ferromagnétique toroïdale (Figure 59) et alimenté par une source de tension $v = V_{\max} \sin(\omega t)$. Après quelques phénomènes transitoires, il s'établit un régime permanent caractérisé par le fait que, pour la même valeur de l'excitation H dans un élément $d\tau$, le champ B y prend 2 valeurs différentes, selon qu'il s'agit de la demi-période croissante (point a Figure 60) ou de la demi-période décroissante (point b Figure 60).

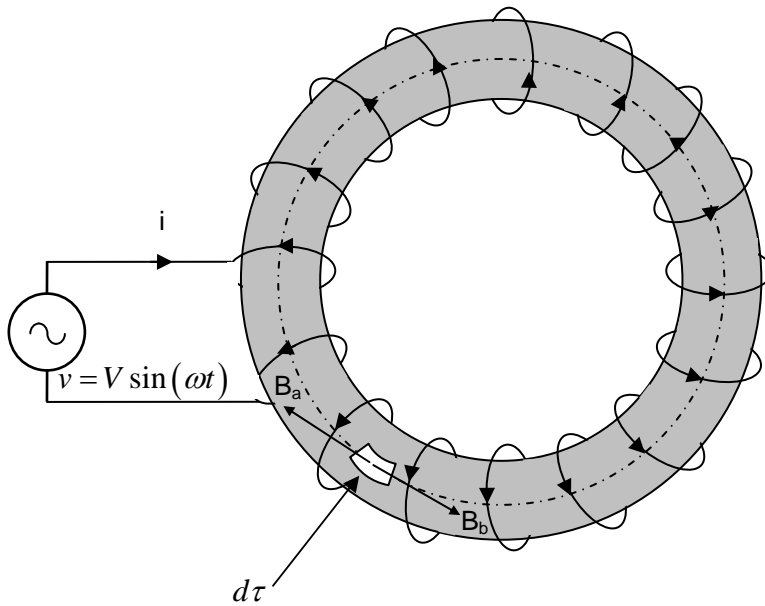


Figure 59

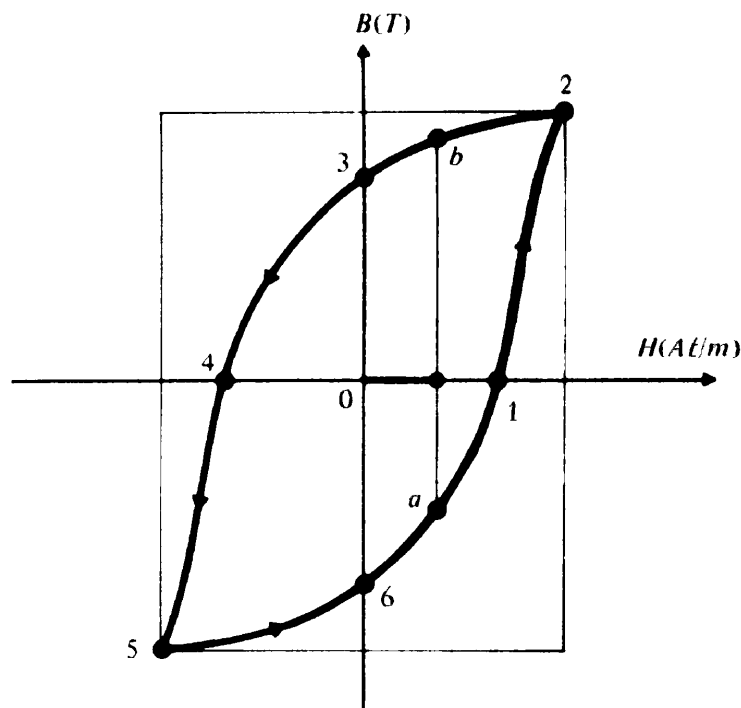


Figure 60

On dit que le matériau s'est fixé sur un "cycle d'hystérésis", représenté par la courbe $B(H)$ pendant une période T .

Pour étudier le phénomène, appliquons la loi de Faraday qui donne la f.é.m. aux bornes du circuit :

$$e = n \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Si on néglige la résistance du circuit, ainsi que les fuites de flux (inductance de fuite l), la source v compensera à chaque instant cette f.é.m. :

$$v = e = V_{\max} \sin(\omega t) = n \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

On peut calculer le flux créé par le circuit à l'intérieur du noyau par intégration :

$\varphi(t) = \int \frac{V_{\max}}{n} \sin(\omega t) dt = -\frac{V_{\max}}{n\omega} \cos(\omega t) + \varphi_0$ où la constante d'intégration φ_0 peut correspondre à la présence d'un aimant permanent, à l'existence d'un flux rémanent ou encore à la présence d'un autre enroulement alimenté en courant continu.

Si $\varphi_0 = 0$ alors :

$\varphi(t) = -\frac{V_{\max}}{n\omega} \cos(\omega t) = \frac{V_{\max}}{n\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, le déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ indique que le flux est en quadrature retard sur la tension $v = V_{\max} \sin(\omega t)$.

D'après la relation $n\varphi = Li$, on en déduit que le courant passant dans la bobine s'écrit :

$i = \frac{V_{\max}}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, on retrouve la définition de l'impédance d'une bobine parfaite : $Z = L\omega$.

Si la section S est constante, le champ B dans le noyau vaut :

$$B(t) = \frac{\varphi(t)}{S} = \frac{V_{\max}}{n\omega S} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On voit que la valeur maximale de ce champ est reliée à la valeur efficace de la f.é.m. par la relation :

$$B_{\max} = \frac{V_{\max}}{n\omega S} = \frac{\sqrt{2} \cdot V_{\text{eff}}}{n \cdot 2\pi \cdot f \cdot S} \text{ que l'on peut écrire :}$$

$$\boxed{V_{\text{eff}} = 4,44 \cdot n \cdot f \cdot S \cdot B_{\max} = 4,44 \cdot n \cdot f \cdot \Phi_{\max}} \quad (1.42), \text{ on appelle cette relation } \mathbf{\text{formule de Boucherot.}}$$

Cette expression montre que la valeur maximale du flux Φ_{\max} ne dépend que de la valeur efficace V_{eff} de la tension d'alimentation (à f constante) : on dit que la bobine travaille à **flux forcé**. Un transformateur électrique ou une machine asynchrone fonctionnent à flux forcé.

La tension d'alimentation impose le flux et l'enroulement appelle un courant en conséquence.

On peut calculer le courant i qui circule dans le circuit à l'aide des valeurs de l'excitation magnétique H dans le noyau, en appliquant le théorème d'Ampère à la ligne d'induction moyenne :

$$i = f(H) = \frac{l}{n} H \quad (1.43)$$

Etant donné la forme du cycle d'hystérésis, ce courant a une allure périodique non sinusoïdale, bien que $v(t)$ et $\varphi(t)$ soient sinusoïdaux. Ceci à cause de la caractéristique non linéaire $B=f(H)$ du matériau. Pour déterminer le courant $i(t)$ appelé par la bobine, il faut procéder à une construction graphique point par point illustrée ci-dessous :

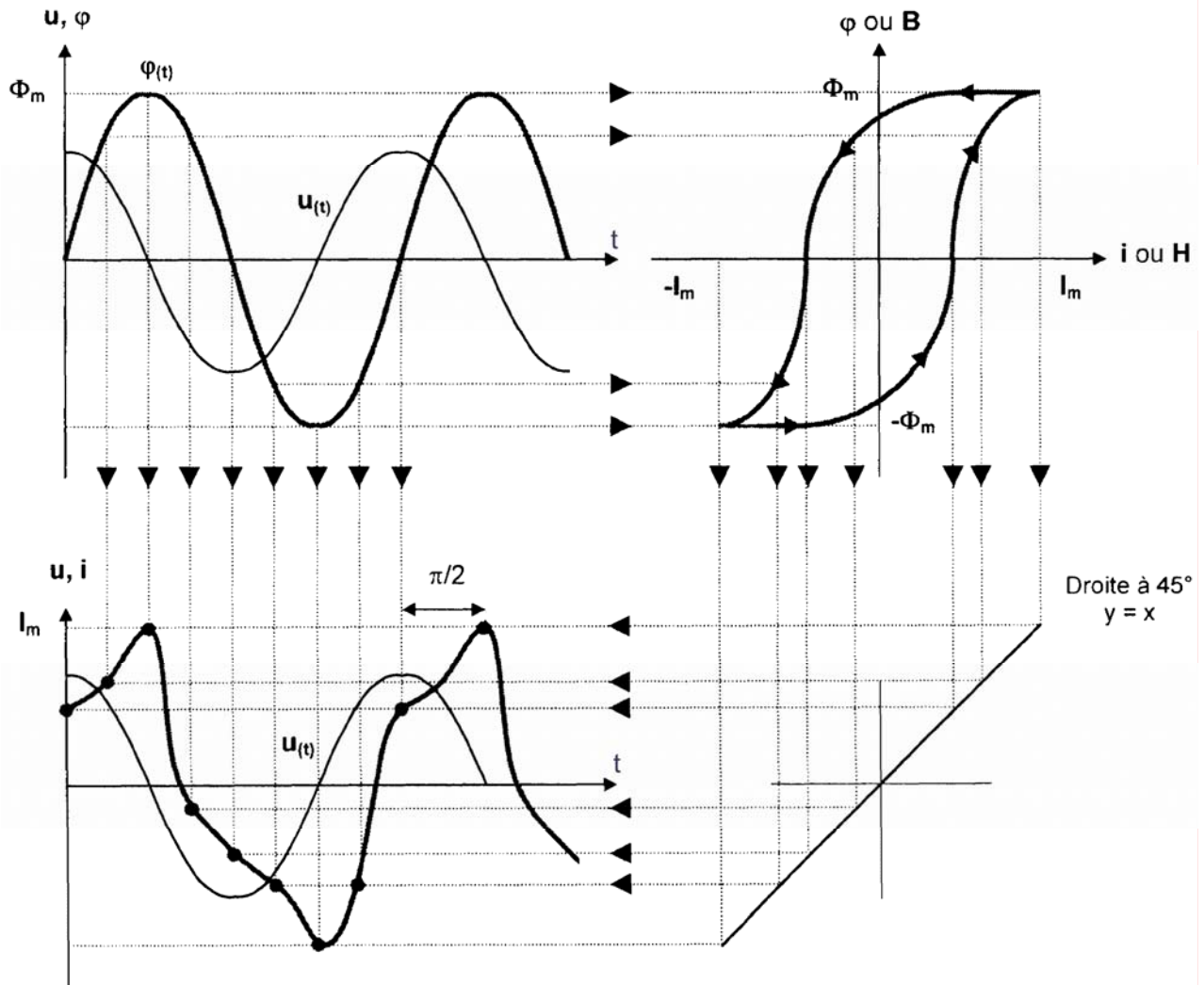


Figure 61

Le courant $i(t)$ dans la bobine est d'autant plus déformé que le circuit est saturé. Le courant n'étant plus sinusoïdale, on ne peut plus utiliser les méthodes de calcul spécifiques au régime sinusoïdal (diagramme de Fresnel, complexes).

Pour obtenir ce courant, on peut procéder de deux manières :

1. Appliquer le principe de superposition des états électriques : décomposer le courant en une somme de composantes sinusoïdales (série de Fourier), appliquer les méthodes de calcul du régime sinusoïdal à chacune d'entre elle et en faire la somme pour obtenir la résultante. Le nombre de termes de la décomposition en série de Fourier est d'autant plus élevé que la précision cherchée est grande.
2. Remplacer la bobine réelle par une bobine fictive équivalente qui, alimentée sous la même tension $v(t)$ produirait le même champ magnétique dans le circuit, appellerait un courant sinusoïdal et aurait la même consommation énergétique (modélisation de la bobine).

Modélisation de la bobine à noyau de fer

Energie emmagasinée

L'énergie magnétique W (en Joule) stockée dans un matériau de volume V (en m^3) soumis à un champ magnétique qui passe de B_1 à B_2 est exprimée par :

$$W = V \int_{B_1}^{B_2} H \cdot dB \quad (1.44), \text{ où } \int H \cdot dB \text{ représente la densité volumique d'énergie magnétique (en } J/m^3 \text{)}.$$

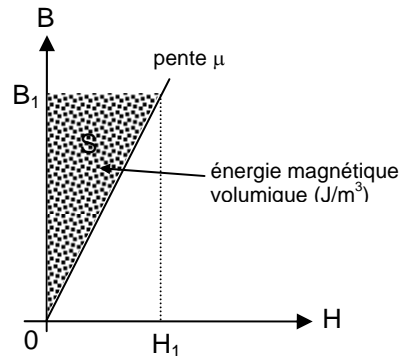
Matériau linéaire

On suppose que $B = \mu H$

L'énergie magnétique emmagasinée dans un volume V de matériau, lorsque B passe de 0 à B_1 , est proportionnelle à l'aire S du triangle grisé ($W = \text{Surface} \cdot \text{Volume}$) :

$$W = \frac{1}{2} \cdot V \cdot B_1 \cdot H_1 \quad (1.45)$$

$$\text{ou encore } W = V \frac{\mu H_1^2}{2} = V \frac{B_1^2}{2\mu} \quad (1.46)$$



Bobine parfaite

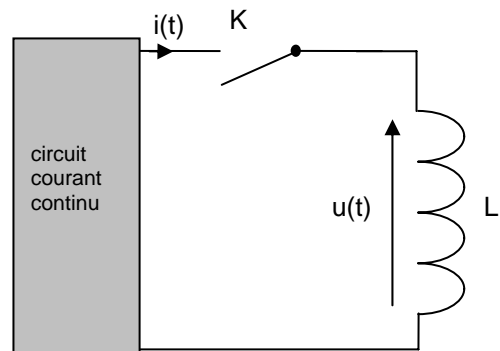
Lorsque l'on ferme K à $t = 0$, un courant s'établit, selon une loi qui dépend du reste du circuit et qui ne nous intéresse pas ici.

Au bout d'une durée t_1 , le régime permanent est établi, l'intensité est $i(t_1) = I$.

L'énergie électromagnétique W stockée dans la bobine lorsque le courant passe de 0 à I s'écrit :

$$W = \int_0^{t_1} u(t) i(t) dt = \int_0^{t_1} L \frac{di(t)}{dt} i(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{L}{2} \frac{di^2(t)}{dt} dt$$

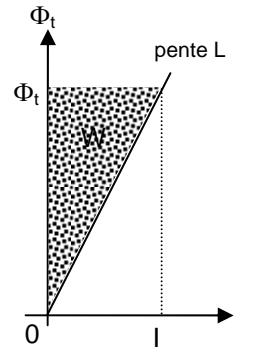
$$W = \frac{1}{2} L [i^2(t)]_0^{t_1} \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} LI^2}$$



On obtient une autre expression en faisant intervenir la relation entre le flux total et le courant :

$$\Phi_t = LI \Rightarrow W = \frac{1}{2} \Phi_t I$$

Cette énergie correspond au triangle grisé.



Energie dans une bobine avec ou sans entrefer

Considérons une bobine satisfaisant l'hypothèse du flux forcé. On suppose le matériau du noyau linéaire et l'entrefer étroit.

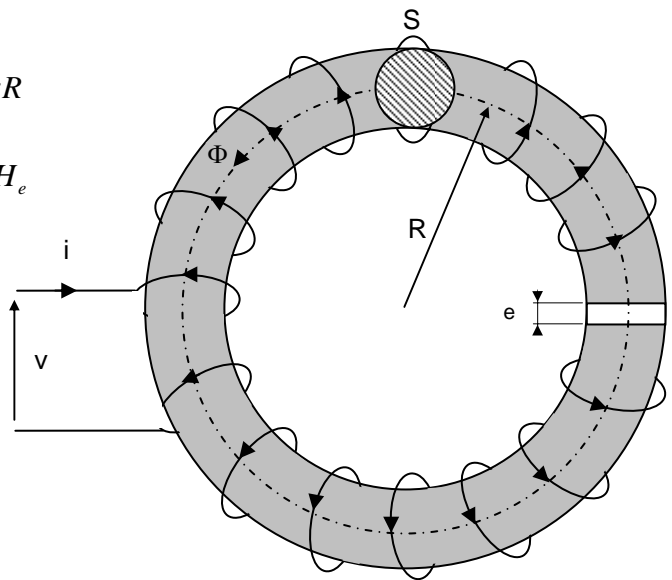
l : longueur moyenne de la ligne de champ $l = 2\pi R$

B champ magnétique dans le fer $B = \mu_r \mu_0 H$

B_e champ magnétique dans l'entrefer $B_e = B = \mu_0 H_e$

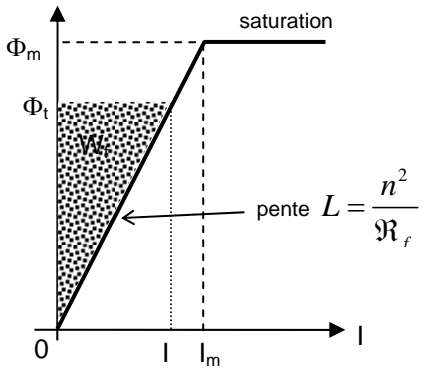
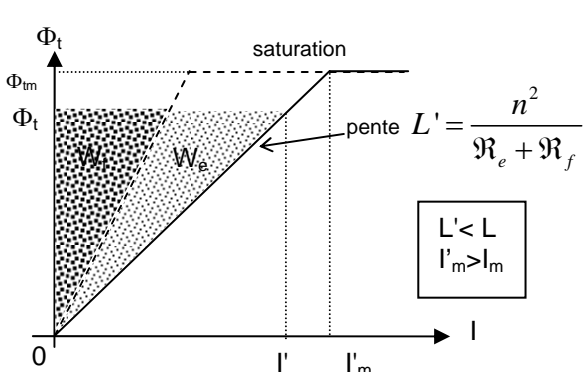
V volume du noyau de fer $V = l \cdot S$

V_e volume de l'entrefer $V_e = e \cdot S$



On peut définir l'inductance propre $L = \frac{n^2}{\mathcal{R}}$ où

\mathcal{R} est la réluctance totale du circuit magnétique de la bobine.
[voir (1.15)]

Bobine à noyau de fer sans entrefer	Bobine à noyau de fer avec entrefer
 <p data-bbox="255 246 686 616">Graph showing magnetic flux Φ_t versus current I for a core without an air gap. The curve is linear up to current I_m and then saturates. The slope is $L = \frac{n^2}{\mathcal{R}_f}$. The area under the linear part is shaded and labeled W_f.</p>	 <p data-bbox="798 246 1388 616">Graph showing magnetic flux Φ_t versus current I for a core with an air gap. The curve is linear up to current I'_m and then saturates. The slope is $L' = \frac{n^2}{\mathcal{R}_e + \mathcal{R}_f}$. The area under the linear part is shaded and labeled W_f and W_e. A box indicates $L' < L$ and $I'_m > I_m$.</p>
<p data-bbox="172 638 790 728">Lorsque i passe de 0 à I, l'énergie stockée dans la bobine vaut :</p>	<p data-bbox="790 638 1404 728">Lorsque i passe de 0 à I', l'énergie stockée dans la bobine vaut :</p>
$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi_t I$	$W' = \frac{1}{2} L' I'^2 = \frac{1}{2} \Phi_t I'$
<p data-bbox="172 840 790 952">Elle reste constante si $i > I_m$. Elle est localisée dans le noyau :</p>	<p data-bbox="790 840 1404 952">Elle est localisée dans le noyau (f) et dans l'entrefer (e) :</p>
$W = W_f = \frac{1}{2} V \cdot B \cdot H$	$W' = W_f + W_e = \frac{1}{2} VBH + \frac{1}{2} V_e B_e H_e$

L'entrefer permet de stocker une énergie plus grande et éloigne l'apparition du phénomène de saturation lorsque le courant augmente ($I'_m > I_m$).

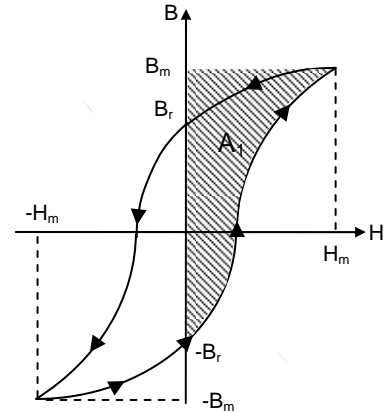
Pertes ferromagnétiques

Pertes par hystérésis

Les pertes proviennent de la différence entre l'énergie emmagasinée durant la croissance de H et celle restituée lors de sa décroissance :

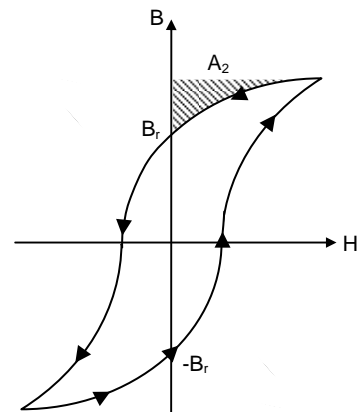
- Lorsque H passe de 0 à H_m , l'énergie électromagnétique **accumulée** dans la bobine par unité de volume est égale à l'aire A_1 hachurée :

$$W_1 = V \int_{-B_r}^{B_m} H \cdot dB > 0$$



- Lorsque H passe de H_m à 0, l'énergie électromagnétique **restituée** par la bobine par unité de volume est égale à l'aire A_2 hachurée :

$$W_2 = V \int_{B_m}^{-B_r} H \cdot dB < 0$$



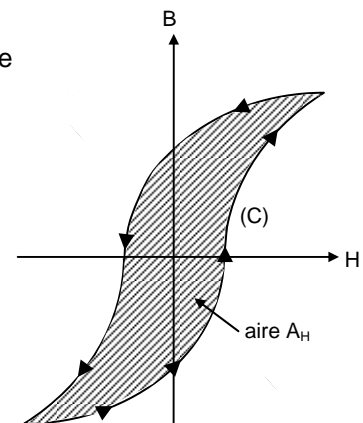
Puisque $A_2 < A_1$, on en conclut qu'une partie de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur dans le noyau.

- Pour un parcours complet du cycle, l'énergie perdue par unité de volume est égale à l'aire du cycle d'hystérésis :

$$W_{cycle} = \int_{(C)} H \cdot dB = A_H \text{ en } J/m^3$$

Les pertes correspondantes sont appelées **pertes par hystérésis**. Elles sont d'autant plus importantes que le nombre de cycles décrits est élevé (donc proportionnelles à la fréquence f) :

$$P_H = f \cdot W_{cycle} \cdot V = f \cdot A_H \cdot V \text{ en } W$$



On peut réduire ces pertes en utilisant des matériaux avec des cycles d'hystérésis étroits. De tels matériaux sont qualifiés de matériaux magnétiques "doux".

Si l'on souhaite quantifier ces pertes, la formule précédente est difficile d'utilisation. On lui préfère des expressions empiriques qui donnent la puissance consommée P_H (en W) en fonction du champ maximal B_m .

On citera par exemple la formule de Steinmetz :

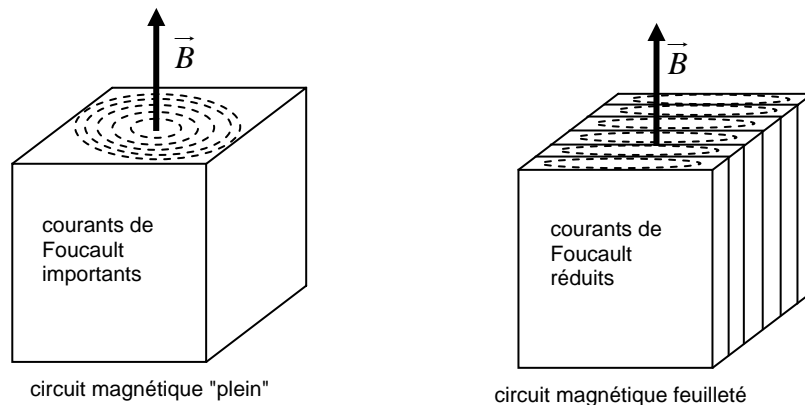
$$P_H = k_H \cdot V \cdot f \cdot B_m^\eta$$

avec k_H : une constante qui dépend du matériau (100 à 500), V : le volume du matériau en m^3 , f : la fréquence en Hertz, B_m : le champ magnétique maximum en Tesla, et η : 1,6 pour les noyaux pleins et 2 pour les tôles minces.

Pertes par courant de Foucault

Les matériaux ferromagnétiques ont souvent des propriétés conductrices de l'électricité. En présence d'un flux variable, la f.é.m. induite (loi de Faraday et de Lenz) crée les **courants de Foucault** circulant dans le matériau sur des plans perpendiculaires aux lignes de champ.

Ces courants produisent un dégagement de chaleur par effet Joule (Ri^2) au sein du circuit magnétique.



Afin de réduire les courants de Foucault, on utilise plusieurs stratégies en parallèle :

- Feuilletage des circuits magnétiques parallèlement aux lignes de champ (tôles minces de 0,3 à 0,35 mm isolées entre elles par du vernis ou par phosphatation).
- Utilisation d'un matériau plus résistif, fer avec addition de silicium (3 %) ou ferrite (en HF).

Les pertes par courants de Foucault sont de la forme :

$$P_F = k_F \cdot V \cdot f^2 \cdot B_m^2$$

avec k_F : constante dépendant du matériau, V : volume du matériau en m^3 , f : fréquence en Hz, B_m : champ magnétique maximal en T.

Globalisation des pertes : pertes fer

Les pertes fer constituent l'ensemble des pertes dans le matériau, regroupant les pertes par hystérésis et les pertes par courant de Foucault.

$$P_{fer} = P_H + P_F = V \cdot (k_H \cdot f \cdot B_m^2 + k_F \cdot f^2 \cdot B_m^2) = M \cdot q$$

avec M : masse en kg du circuit magnétique et q : pertes exprimées en W/kg.

La mesure de ces pertes ne peut être que globale. On peut séparer P_H et P_F en mesurant les pertes fer, à B_m constant, pour deux valeurs de la fréquence.

Les fabricants de tôles pour machines électriques fournissent des tables de valeurs de q relevées pour différentes valeurs de B_m à 50 Hz ou 60 Hz.

Quand on ne dispose pas de ces tableaux, on admet la loi : $q = k \cdot B_m^2$.

Modèle équivalent de la bobine réelle

Quand on applique une tension sinusoïdale à une bobine à noyau de fer, on constate que :

- De l'énergie est consommée en raison des pertes fer.
- Le courant appelé n'est pas sinusoïdal.

Pour continuer à utiliser les méthodes de calcul propres au régime sinusoïdal, on remplace le courant réel par un courant fictif sinusoïdal équivalent $i_e(t)$ transportant la même puissance.

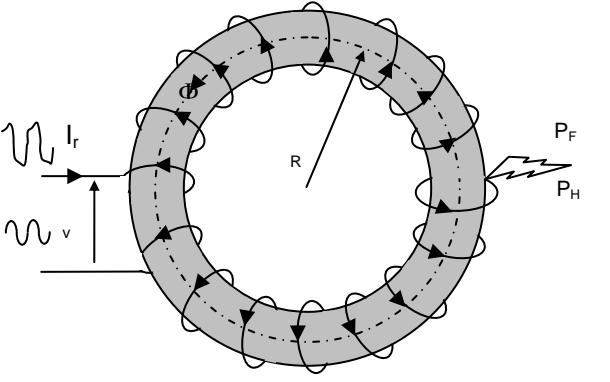
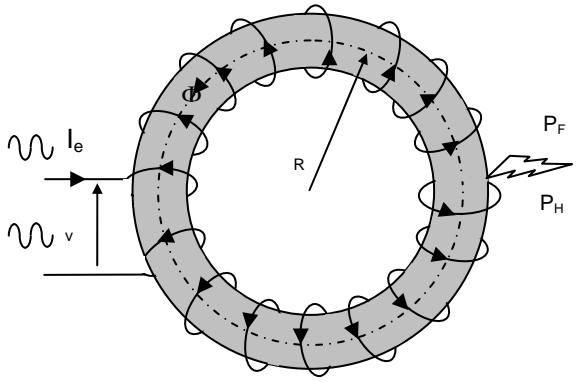
Bobine à noyau de fer réelle	Bobine à noyau de fer équivalente
	
$u(t) = V_{\max} \sin(\omega t) \Rightarrow \varphi(t) = \frac{V_{\max}}{n\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ <p>Loi de Faraday et de Lenz Hypothèse du flux forcé Le flux et le champ sont sinusoïdaux</p>	$u(t) = V_{\max} \sin(\omega t) \Rightarrow \varphi(t) = \frac{V_{\max}}{n\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ <p>Loi de Faraday et de Lenz Hypothèse du flux forcé Le flux et le champ sont sinusoïdaux</p>
<p>La valeur efficace I_r de $i_r(t)$ est mesurée avec un appareil ferromagnétique ou TRMS</p>	<p>La valeur efficace I de $i_e(t)$ est égale à I_r pour s'assurer du même comportement énergétique</p>
<p>La mesure de la puissance active avec un wattmètre fournit globalement la somme des pertes fer : $P_{fer} = P_F + P_H$</p>	<p>La puissance P_{fer} est globalement celle consommée par une résistance notée R_F sous la tension $v(t)$</p>

Schéma équivalent simplifié

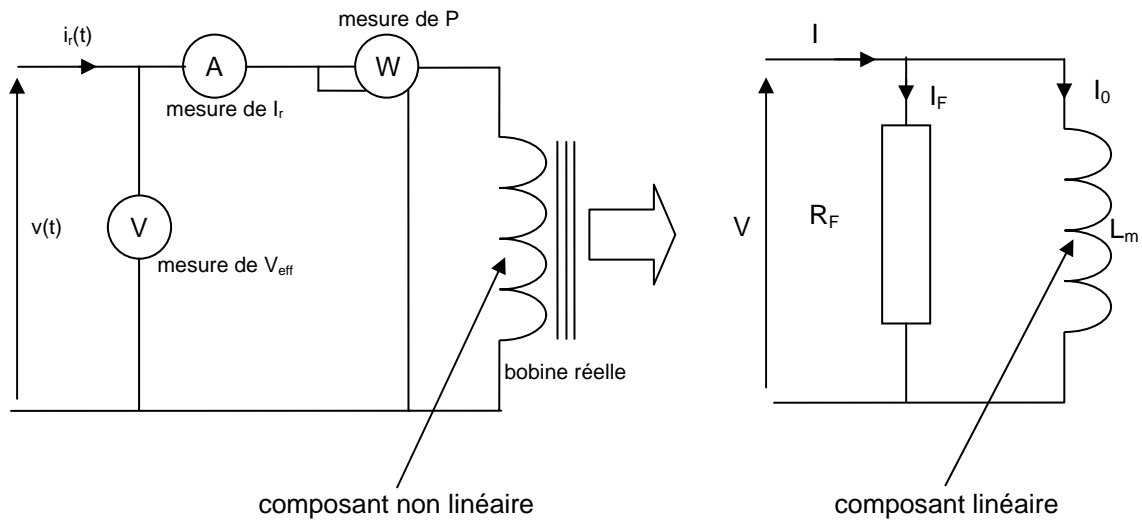


Figure 62

I_F : courant actif [en phase avec $v(t)$] et I_0 : courant réactif [en quadrature arrière par rapport à $v(t)$].

R_F modélise les pertes fer et se calcule à partir de la puissance active $P = P_{\text{fer}}$ consommée :

$$R_F = \frac{V_{\text{eff}}^2}{P} = \frac{P}{I_F^2} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_F}$$

L_m modélise l'inductance de magnétisation (linéaire, indépendante de μ_r). On la calcule à partir de la puissance réactive Q :

$$X_m = L_m \omega = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Q} = \frac{Q}{I_0^2} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_0}$$

Diagramme de Fresnel des courants I_F et I_0 :

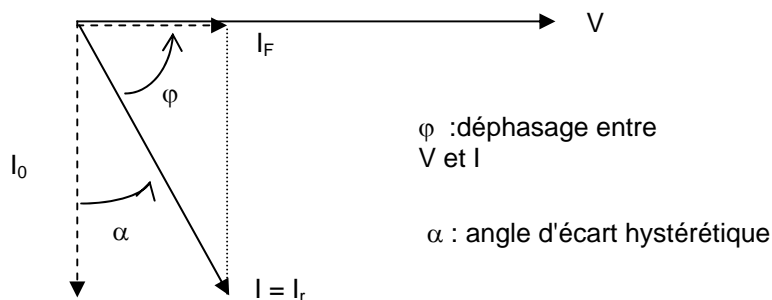


Schéma équivalent complet

Le schéma équivalent complet s'obtient en prenant en compte la résistance R de l'enroulement et l'inductance de fuite l_f :

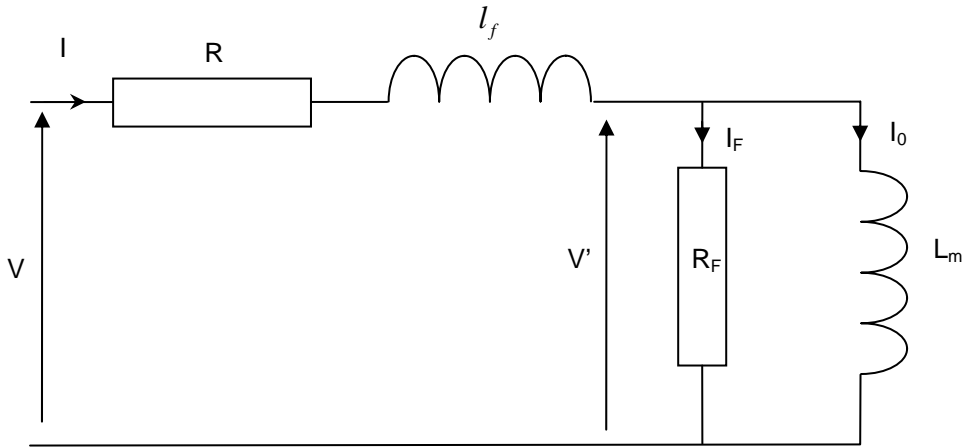


Figure 63

R peut se mesurer avec un ohmmètre, c'est une résistance bien réelle (celle des n spires constituant la bobine : $R = \rho \frac{l}{S}$) contrairement à R_F .

Diagramme de Fresnel des courants pour le schéma équivalent complet :

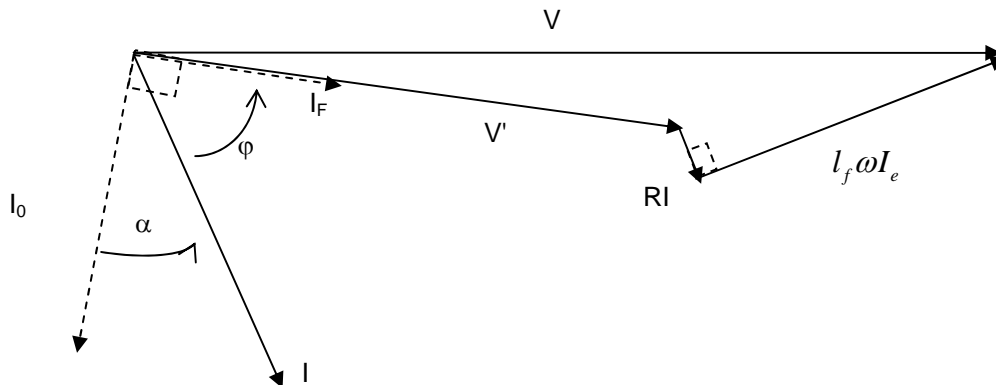


Figure 64

Exercice

Lors de l'essai d'une bobine à noyau de fer, on a relevé les valeurs suivantes :

$V = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $I = 0,3 \text{ A}$, $P = 10 \text{ W}$, (voir la Figure 65)

Déterminer le modèle linéaire équivalent simplifié (Figure 62) du point de vue absorption de puissance.

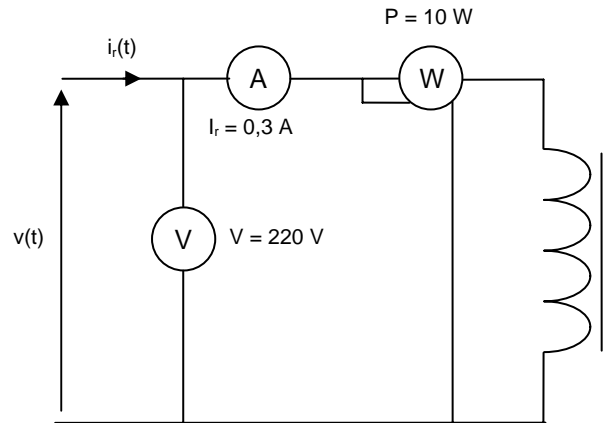


Figure 65

Déterminons le facteur de puissance de la bobine réelle :

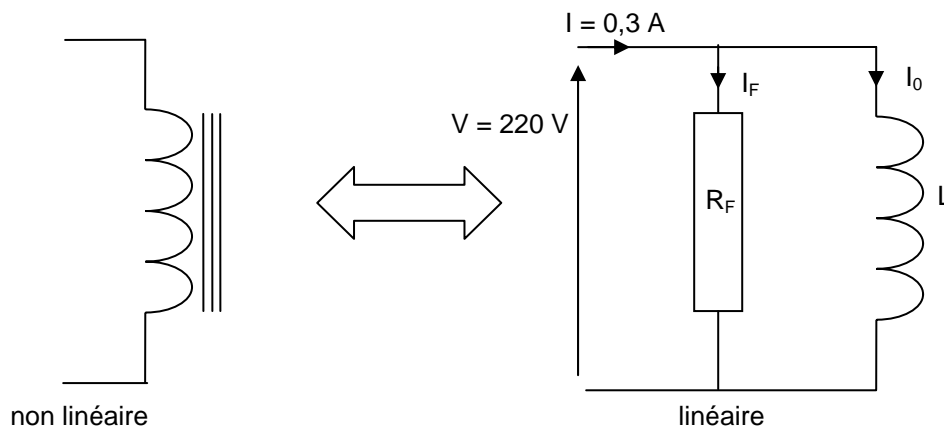
$$\cos \varphi = \frac{P}{V \cdot I} = \frac{10}{220 \times 0,3} = 0,151$$

On en déduit :

- l'intensité qui traverse R_f : $I_f = I \cdot \cos \varphi = 0,3 \times 0,151 = 0,045 \text{ A}$
- l'intensité qui traverse l'inductance idéale : $I_0 = I \cdot \sin \varphi = 0,3 \times \sin(\arccos 0,151) = 0,296 \text{ A}$

Ensuite, on détermine :

- la résistance R_f : $R_f = \frac{V}{I_f} = \frac{220}{0,045} = 4840 \Omega$
- la réactance de la bobine idéale : $L\omega = \frac{V}{I_0} = \frac{220}{0,296} = 741 \Omega \Rightarrow L = \frac{V}{\omega \cdot I_0} = 2,36 \text{ H}$



Bien entendu, le raisonnement employé n'est pas le seul valable...

Circuits couplés linéaires inductances diverses

On peut considérer les machines électriques comme des circuits couplés mobiles, c'est-à-dire des ensembles de bobinages parcourus par des courants (inducteurs ou induits), ayant un circuit magnétique commun et dont la géométrie peut varier. Il est donc nécessaire de définir de façon précise les "inductances" de ces divers circuits. En effet, dans le cas où la géométrie de la machine n'est pas variable, les inductances peuvent éventuellement varier en fonction de la valeur des courants (phénomènes de saturation) et dans le cas où la géométrie de la machine est variable, ces inductances varient non seulement en fonction de la valeur des courants, mais encore en fonction de la position de l'armature ou du rotor. Ce sont d'ailleurs ces variations qui produisent le couple ou la force électromagnétique.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux circuits couplés linéaires, c'est-à-dire tels que les flux soient proportionnels aux courants : courbe B(H) assimilée à une droite.

Considérons deux circuits magnétiques couplés de façon quelconque (Figure 66), comportant respectivement n_1 et n_2 spires parcourus par des courants i_1 et i_2 et désignons par Φ_1 et Φ_2 les flux produits par ces circuits.

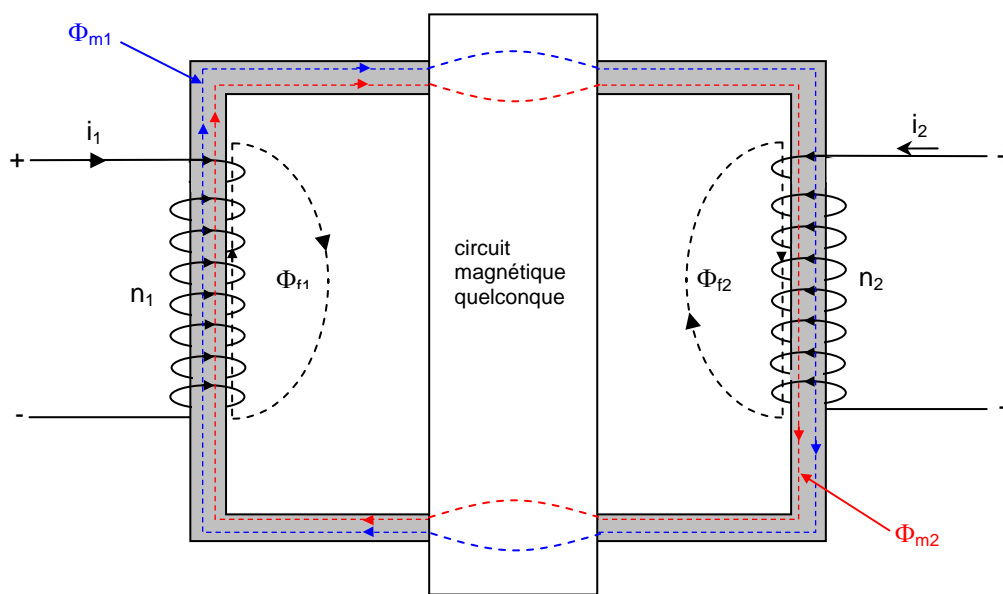


Figure 66

Attention : sur la Figure 66, les deux trajets en pointillés représentent chacun un flux bien particulier.

Le flux Φ_1 est constitué, en général, d'une partie Φ_{m1} qui traverse le circuit 2 et d'une partie Φ_{f1} qui ne traverse pas le circuit 2 (sur la Figure 66, ce flux Φ_{f1} est représenté comme le flux qui fuit dans l'air, mais il peut également représenter un flux qui traverse une autre partie du circuit magnétique, mais sans traverser le circuit 2 comme sur la Figure 51). Il en est de même pour le flux Φ_2 produit par le circuit 2. On a donc :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{m1} + \Phi_{f1} \\ \Phi_2 = \Phi_{m2} + \Phi_{f2} \end{cases} \quad (1.47)$$

On voit que le "flux mutuel", défini comme le flux commun qui traverse à la fois les deux circuits, vaut :

$$\Phi_m = \Phi_{m1} + \Phi_{m2} \quad (1.48)$$

On voit également que les flux qui traversent respectivement les circuits sont constitués du flux qu'ils produisent eux-mêmes, Φ_1 ou Φ_2 , et d'une partie du flux produit par l'autre circuit, Φ_{m2} ou Φ_{m1} .

En désignant ces flux totaux par Φ_{1t} et Φ_{2t} , on a :

$$\begin{cases} \Phi_{1t} = \Phi_1 + \Phi_{m2} \\ \Phi_{2t} = \Phi_2 + \Phi_{m1} \end{cases} \quad (1.49)$$

Ou encore, compte tenu de la définition précédente du flux mutuel Φ_m :

$$\begin{cases} \Phi_{1t} = \Phi_{f1} + \Phi_m \\ \Phi_{2t} = \Phi_{f2} + \Phi_m \end{cases} \quad (1.50)$$

Remarque : les signes + qui apparaissent dans les relations (1.48), (1.49) et (1.50) correspondent aux polarités de courant et au sens d'enroulements de la Figure 66.

Il faudrait mettre un signe – si on inversait soit le sens du courant i_2 , soit le sens des enroulements du circuit 2.

Les huit inductances de deux circuits couplés

Pour deux circuits couplés, on définit les huit inductances suivantes, en fonction des flux définis au paragraphe précédent :

<p>Inductance "de magnétisation" du circuit 1 $L_{magn1} = n_1 \frac{\Phi_{m1}}{i_1}$</p> <p>Inductance "de magnétisation" du circuit 2 $L_{magn2} = n_2 \frac{\Phi_{m2}}{i_2}$</p>	(1.51)
<p>Inductance "de fuite" du circuit 1 $l_1 = n_1 \frac{\Phi_{f1}}{i_1}$</p> <p>Inductance "de fuite" du circuit 2 $l_2 = n_2 \frac{\Phi_{f2}}{i_2}$</p>	(1.52)
<p>Inductance "propre" du circuit 1 $L_1 = n_1 \frac{\Phi_1}{i_1}$</p> <p>Inductance "propre" du circuit 2 $L_2 = n_2 \frac{\Phi_2}{i_2}$</p>	(1.53)
<p>Inductance "mutuelle" du circuit 1 $M_1 = n_1 \frac{\Phi_{m2}}{i_2}$</p> <p>Inductance "mutuelle" du circuit 2 $M_2 = n_2 \frac{\Phi_{m1}}{i_1}$</p>	(1.54)

Ces définitions sont un peu arbitraires dans la mesure où on a supposé que les flux sont proportionnels aux courants (ce qui n'est pas toujours vrai pour les flux de fuite), ce qui se produit uniquement dans la zone linéaire de la courbe de magnétisation.

De la même façon que pour un seul circuit, les inductances propres sont reliées aux inductances de fuite et de magnétisation par les relations suivantes :

$$\begin{cases} L_1 = l_1 + L_{magn1} \\ L_2 = l_2 + L_{magn2} \end{cases} \quad (1.55)$$

Dans la relation (1.54), il n'est pas immédiatement évident que les inductances mutuelles M_1 et M_2 sont égales.

On peut faire le raisonnement suivant : quel que soit le circuit, il présente à chaque instant une réluctance \mathcal{R}_m au passage du flux commun Φ_m . Appliquons alors le théorème d'Ampère à l'excitation H_1 qui serait créée par le courant i_1 seul, en supposant que le courant i_2 soit nul ($\Phi_{m2} = 0$) :

$$n_1 i_1 = H_1 l_m = \mathcal{R}_m \Phi_{m1}$$

De la même façon, si on applique le théorème d'Ampère avec $i_1 = 0$:

$$n_2 i_2 = H_2 l_m = \mathcal{R}_m \Phi_{m2}$$

On en déduit, d'après les relations de définition (1.54) :

$$M_1 = \frac{n_1 \Phi_{m2}}{i_2} = \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}_m}$$

$$\text{et } M_2 = \frac{n_2 \Phi_{m1}}{i_1} = \frac{n_2 n_1}{\mathcal{R}_m}$$

Les deux inductances mutuelles M_1 et M_2 sont donc égales; on désigne leur valeur commune par M :

$$\boxed{M_1 = M_2 = M} \quad (1.56)$$

Relations entre les inductances et le rapport du nombre de spires

Pour les transformateurs et les machines asynchrones, il peut être utile d'exprimer les inductances de fuites et de magnétisation en fonction de cette inductance mutuelle M et du rapport entre les nombres de spires des deux circuits couplés. Posons :

$$\boxed{m = \frac{n_2}{n_1}} \quad (1.57)$$

On obtient, d'après (1.51) et (1.56) :

$$L_{magn1} = n_1 \frac{\Phi_{m1}}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} M_2 = \frac{1}{m} \cdot M$$

$$L_{magn2} = n_2 \frac{\Phi_{m2}}{i_2} = \frac{n_2}{n_1} M_1 = m \cdot M$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_{magn1} &= \frac{M}{m} \\ L_{magn2} &= m \cdot M \end{aligned}} \quad (1.58)$$

En faisant le quotient et le produit de ces deux relations, on obtient :

$$\boxed{\frac{L_{magn2}}{L_{magn1}} = m^2} \quad (1.59)$$

$$\boxed{M = \pm \sqrt{L_{magn1} \cdot L_{magn2}}} \quad (1.60)$$

On peut également exprimer les deux inductances de fuite sous une autre forme, au moyen des inductances propres :

D'après les relations (1.55) :

$$L_1 = l_1 + L_{magn1} = l_1 + \frac{M}{m}$$

$$L_2 = l_2 + L_{magn2} = l_2 + m \cdot M$$

$$\boxed{\begin{aligned} l_1 &= L_1 - \frac{M}{m} \\ l_2 &= L_2 - m \cdot M \end{aligned}} \quad (1.61)$$

Exemple : On connaît les 2 inductances de fuite et l'inductance mutuelle de deux circuits couplés sur une carcasse magnétique avec $n_1 = 500$ spires et $n_2 = 50$ spires :

$$l_1 = 6 \text{ H} \quad l_2 = 0,03 \text{ H} \quad M = 12 \text{ H}$$

Calculer les inductances propres L_1 et L_2 des circuits et les inductances de magnétisation L_{magn1} et L_{magn2} .

D'après (1.58) : $L_{magn1} = 120 \text{ H} \quad L_{magn2} = 1,2 \text{ H}$

D'après (1.55) : $L_1 = 126 \text{ H} \quad L_2 = 1,23 \text{ H}$

Coefficient de couplage et de dispersion

Lorsque deux circuits sont couplés, il est utile de définir deux coefficients k et σ , appelés "coefficient de couplage" et "coefficient de dispersion", qui caractérisent les échanges mutuels de flux entre les circuits. En effet, s'il n'y avait pas de fuites, le flux mutuel Φ_m serait égal à la somme des flux produits $\Phi_1 + \Phi_2$, et il peut être intéressant de savoir de combien on s'éloigne de ce cas idéal.

Les "coefficients de fuite" définissent les pourcentages utiles des flux :

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 &= \frac{\Phi_{m1}}{\Phi_1} = \frac{L_{magn1}}{L_1} \\ k_2 &= \frac{\Phi_{m2}}{\Phi_2} = \frac{L_{magn2}}{L_2} \end{aligned} \right.$$

Le "coefficient de couplage" k est défini comme la moyenne géométrique des coefficients de fuite de chaque circuit :

$$\boxed{k^2 = k_1 k_2 = \frac{L_{magn1} \cdot L_{magn2}}{L_1 \cdot L_2} = \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2}} \quad (1.62)$$

Le coefficient de couplage est excellent pour un transformateur (supérieur à 0,95), mais il est beaucoup plus faible pour une machine asynchrone (de l'ordre de 0,60).

Le "coefficient de dispersion" σ est défini par la relation suivante :

$$\sigma = 1 - k^2 \quad (1.63)$$

On peut l'exprimer en fonction des 2 inductances propres et de l'inductance mutuelle :

$$\sigma = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2} \quad (1.64)$$

Lorsque le couplage entre deux circuits est "parfait", on a :

$$\begin{cases} k = 1 \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

Exemple de couplage

Considérons (Figure 67) deux bobines parcourues par le même courant i et supposons que le couplage soit parfait ($k = 1$, pas de flux de fuite).

Si L_1 et L_2 sont les inductances propres de chaque bobine, l'inductance équivalente aux deux bobines entre les points A et B, dépend de la façon dont elles sont connectées.

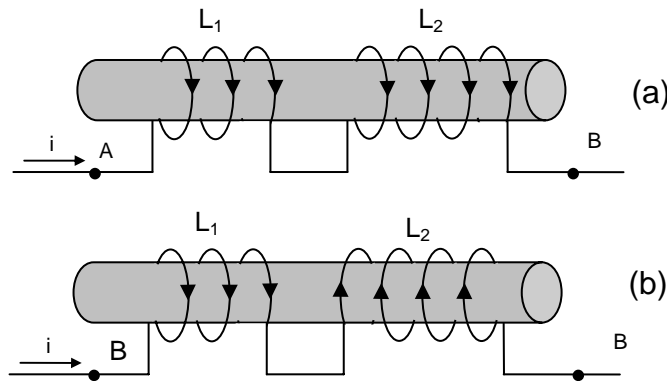


Figure 67

Si chaque flux mutuel s'ajoute au flux propre à chaque bobine [cas (a)], on a, avec $k = 1$:

$$L_{AB} = L_1 + L_2 + 2M = \left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} \right)^2 \quad (1.65)$$

Si chaque flux mutuel se retranche du flux propre à chaque bobine [cas (b)], on a :

$$L_{AB} = L_1 + L_2 - 2M = \left(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2} \right)^2 \quad (1.66)$$

On pourra annuler l'inductance d'un bobinage tel que celui de la Figure 67 (b), en prenant le même nombre de spires pour les deux bobines ($L_1 = L_2$).

Le dessin des bobines de la Figure 67 est très souvent remplacé par les symboles de la Figure 68 , plus simple d'utilisation.

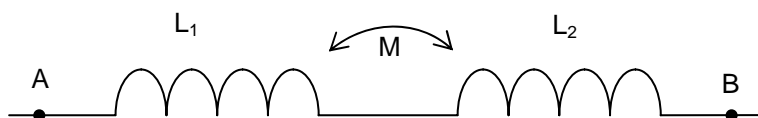
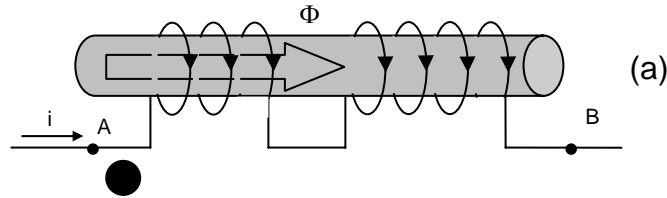


Figure 68

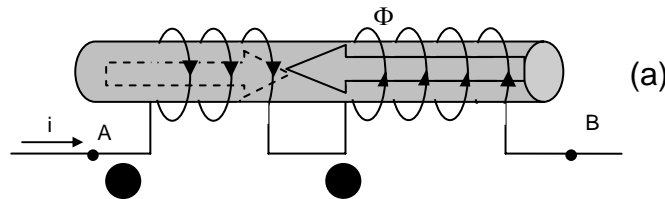
Afin de conserver l'information "addition" ou "soustraction" des flux mutuels, on utilise des **points** aux voisinages des bobines qui **représentent les extrémités de même polarité instantanée compte tenu de la seule mutuelle inductance**.

Pour placer les points sur une paire de bobines couplées, on choisit la direction du courant dans l'une d'elles et l'on place le point à l'extrémité par laquelle le courant y entre. La polarité instantanée de l'extrémité pointée est positive par rapport à l'autre extrémité de la bobine. Pour déterminer le flux correspondant circulant dans le noyau, on applique la règle du tire-bouchon de Maxwell.

Ainsi, la Figure 67 devient :



Conformément à la loi de Lenz, le flux dans la seconde bobine doit s'opposer au flux initial :



La règle du tire-bouchon de Maxwell permet alors de déterminer la direction du courant dans la bobine 2; comme la f.é.m. induite est positive à l'extrémité par laquelle le courant quitte la bobine, on place un point à cette extrémité. Avec la polarité instantanée des bobines ainsi indiquée, la représentation du noyau est superflue, ce qui conduit au schéma de la Figure 69 :

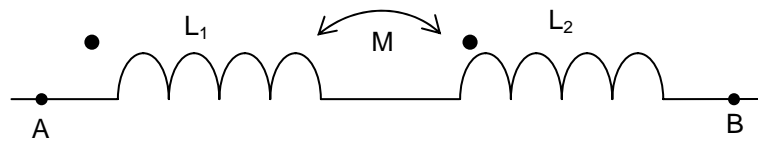


Figure 69

La Figure 67 (b), elle, est équivalente à la Figure 70 :

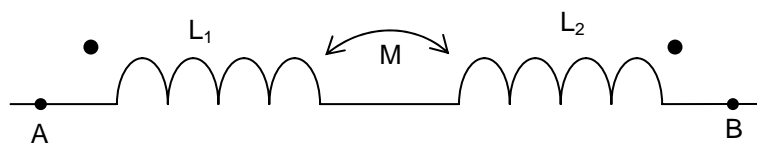
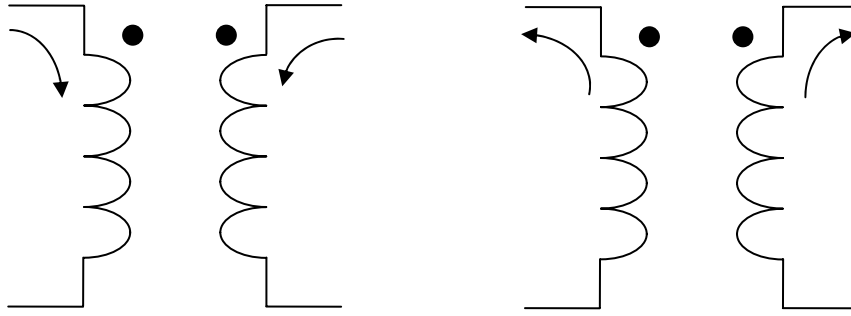


Figure 70

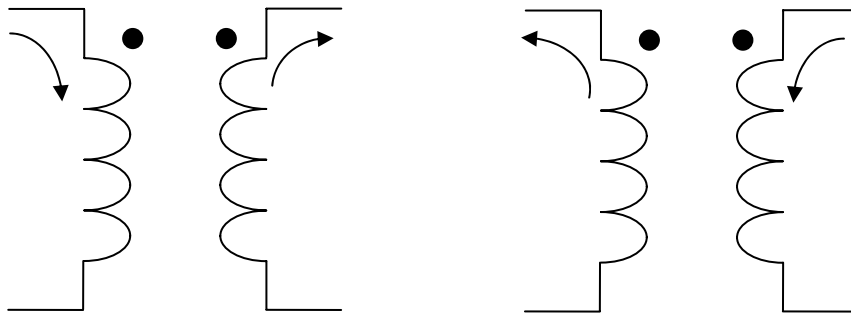
Pour déterminer le signe des tensions mutuelles ($M \frac{di}{dt}$) induites dans les équations de mailles, il suffit d'appliquer la règle des points qui s'énonce ainsi :

Lorsque les deux courants donnés entrent ou sortent d'une paire de bobines couplées par les extrémités pointées, les signes des termes en M seront identiques aux signes des termes en L.



M et L de mêmes signes

Lorsqu'un des courants entre par une extrémité pointée et que le deuxième sort par l'autre extrémité pointée, les signes des termes en M sont opposés à ceux des termes en L.



M et L de signes opposés

Ainsi, si on applique une f.é.m. $e(t)$ entre les extrémités A et B de la bobine de la Figure 69, nous aurons :

$$e = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt}$$

Tandis que, la même f.é.m. $e(t)$ appliquée aux bornes de la bobine de la Figure 70 donnera :

$$e = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - 2M \frac{di}{dt}$$

Exercices

1. Ecrire les équations différentielles de mailles pour le circuit couplé de la Figure 71. Dessiner le circuit équivalent pointé.

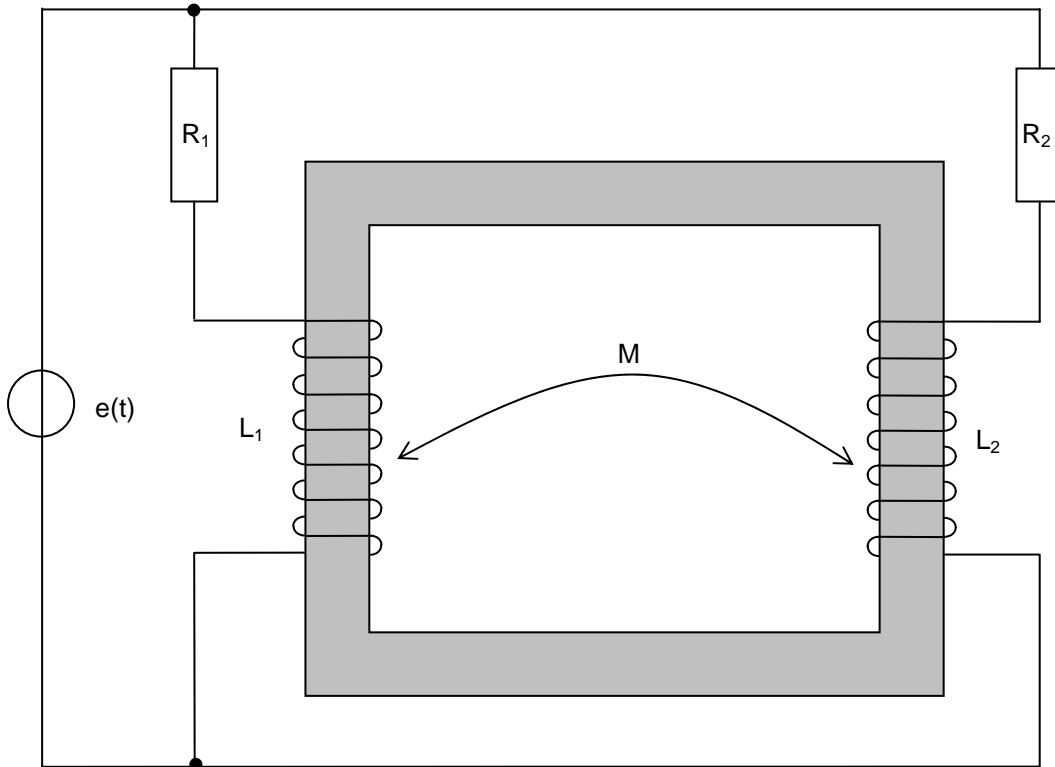


Figure 71

2. Ecrire l'équation de maille du circuit de la Figure 72 (équation différentielle). Dessiner le circuit équivalent pointé.

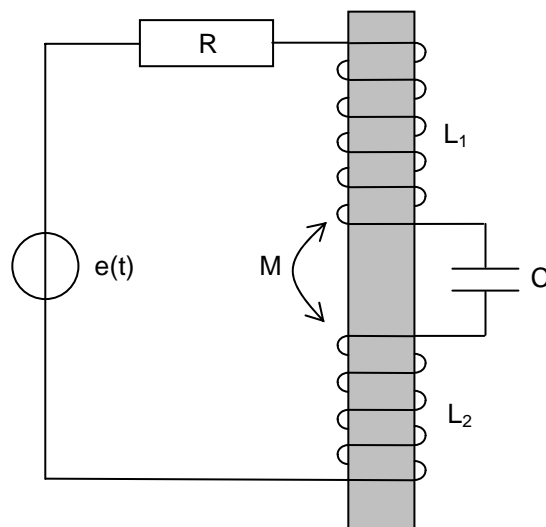


Figure 72

3. Déterminer le circuit équivalent pointé du circuit couplé de la Figure 73. Calculer la tension aux bornes de la réactance $-j10 \Omega$ en utilisant ce circuit équivalent.

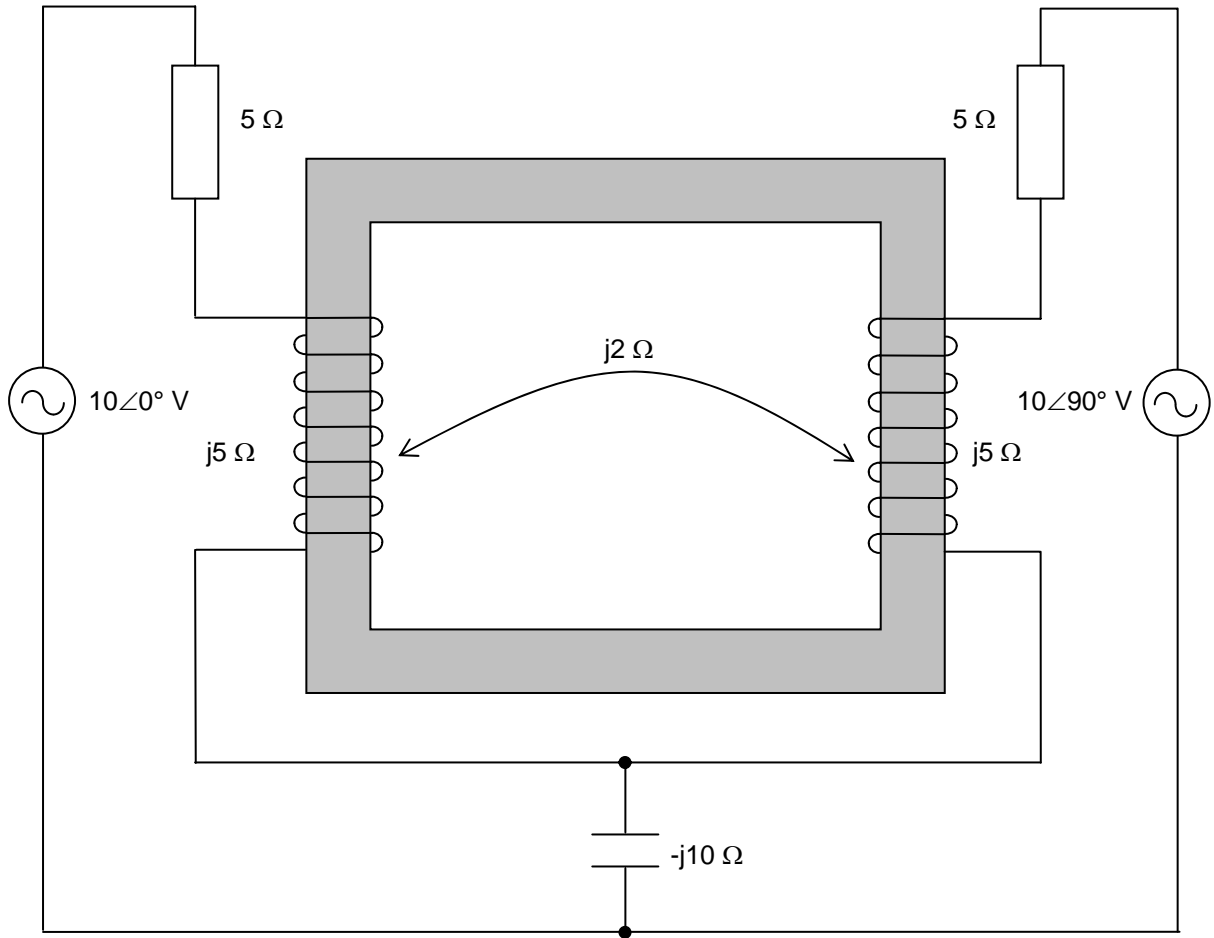


Figure 73

4. Déterminer le circuit équivalent pointé correspondant au circuit de la Figure 74. Ecrire l'équation de maille de ce circuit.

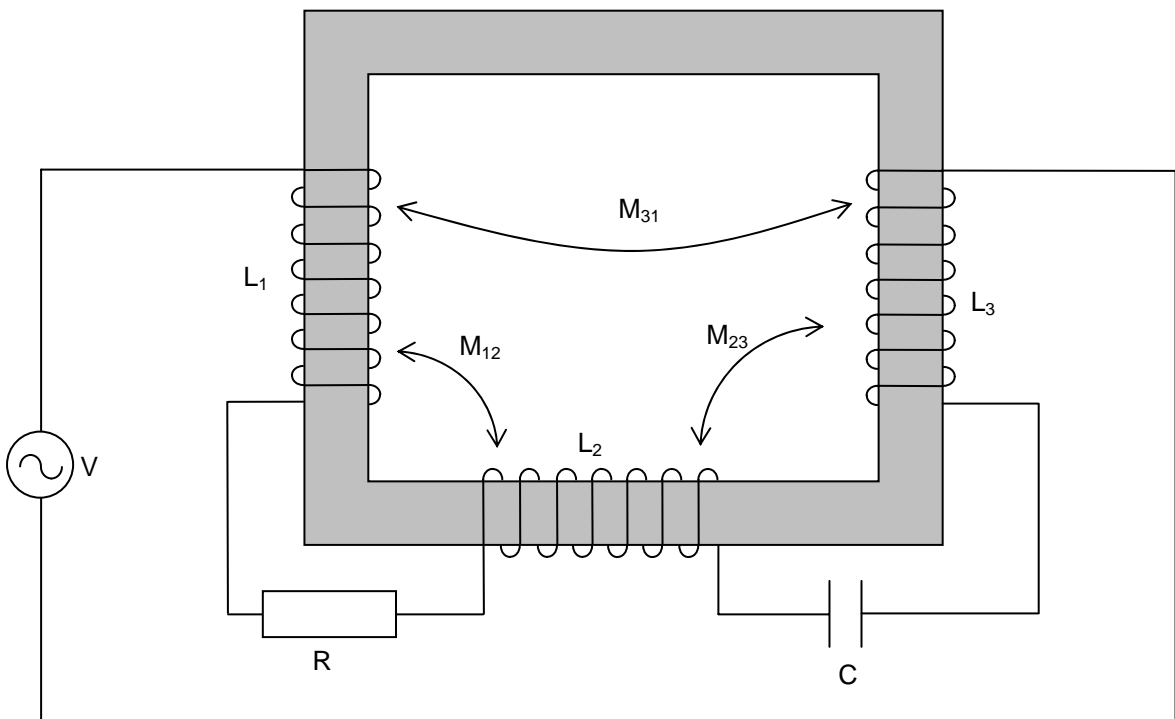


Figure 74

5. Un courant continu de 5 A circule dans la bobine 1 d'une paire de bobine couplées et les flux Φ_{f1} et Φ_{m1} sont respectivement de $2 \cdot 10^{-4}$ Wb et de $4 \cdot 10^{-4}$ Wb. Le nombre de spires de la bobine 1 est de $N_1 = 500$ et le nombre de spires de la bobine 2 est $N_2 = 1500$.

Déterminer L_1 , L_2 , M et k .

6. Deux bobines couplées d'inductance $L_1 = 0,8$ H et $L_2 = 0,2$ H ont un coefficient de couplage $k = 0,9$.

Calculer l'inductance mutuelle M ainsi que le rapport du nombre de tours $\frac{N_2}{N_1}$.

Solutions

1. On choisit les courants i_1 et i_2 comme le montre le schéma Figure 75 (c'est un choix arbitraire). On applique la règle du tire-bouchon de Maxwell à l'enroulement 1, considéré, ici, comme inducteur. Nous obtenons le flux Φ_1 dont le sens est porté sur le schéma. Conformément à la loi de Lenz, l'enroulement 2 sera le siège de f.é.m. tendant à créer un flux induit opposé. On porte Φ_2 sur le schéma, on applique la règle du tire-bouchon à l'enroulement 2 et on obtient le sens du courant induit dans cet enroulement. On peut donc placer les points comme indiqué :

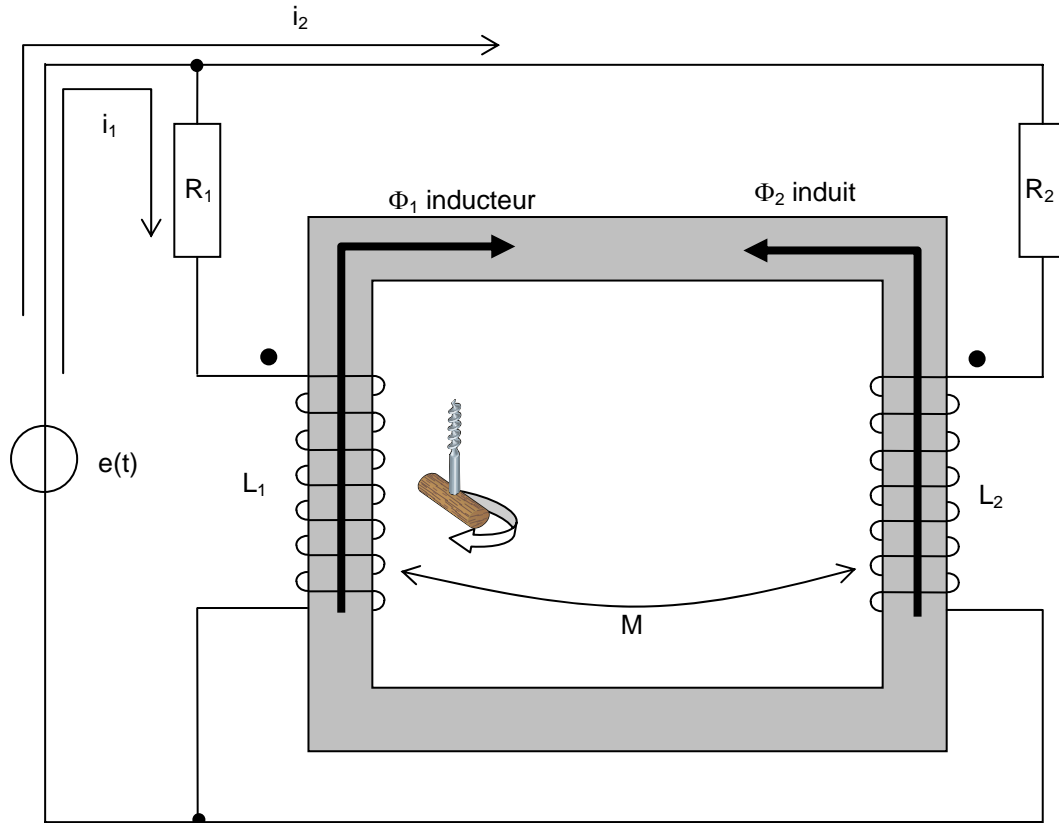


Figure 75

Les deux courants donnés i_1 et i_2 entrent d'une paire de bobines couplées par les extrémités pointées, les signes des termes en M seront identiques aux signes des termes en L , on peut donc écrire :

$$e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$e = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Le schéma équivalent est celui de la Figure 76 :

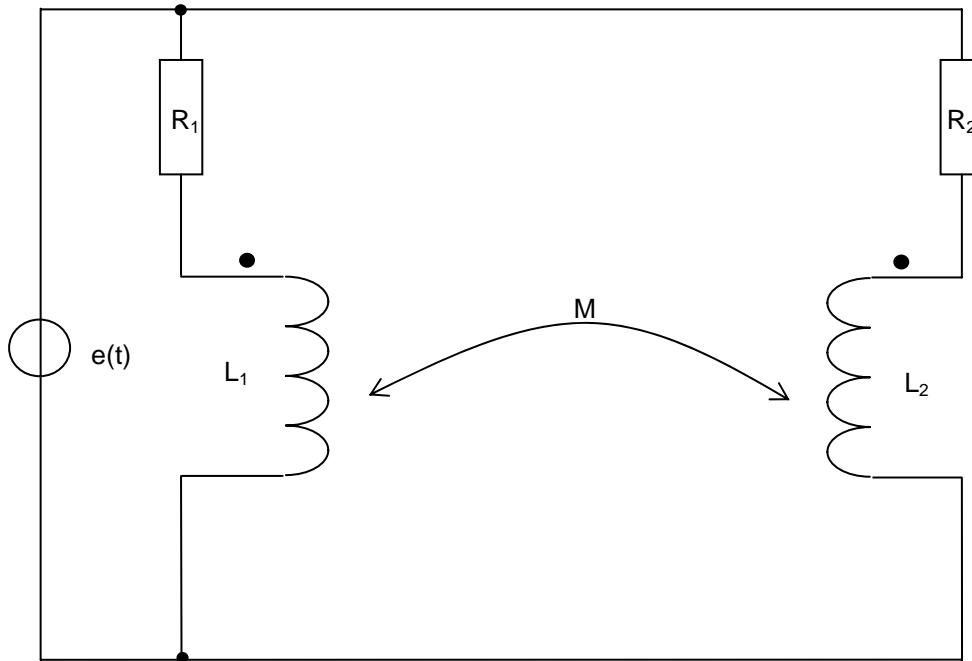


Figure 76

2. Afin de déterminer les signes des coefficients de mutuelles inductances, nous commencerons par l'établissement du schéma équivalent pointé. Nous choisissons arbitrairement le sens du courant que nous portons sur le schéma Figure 77 :

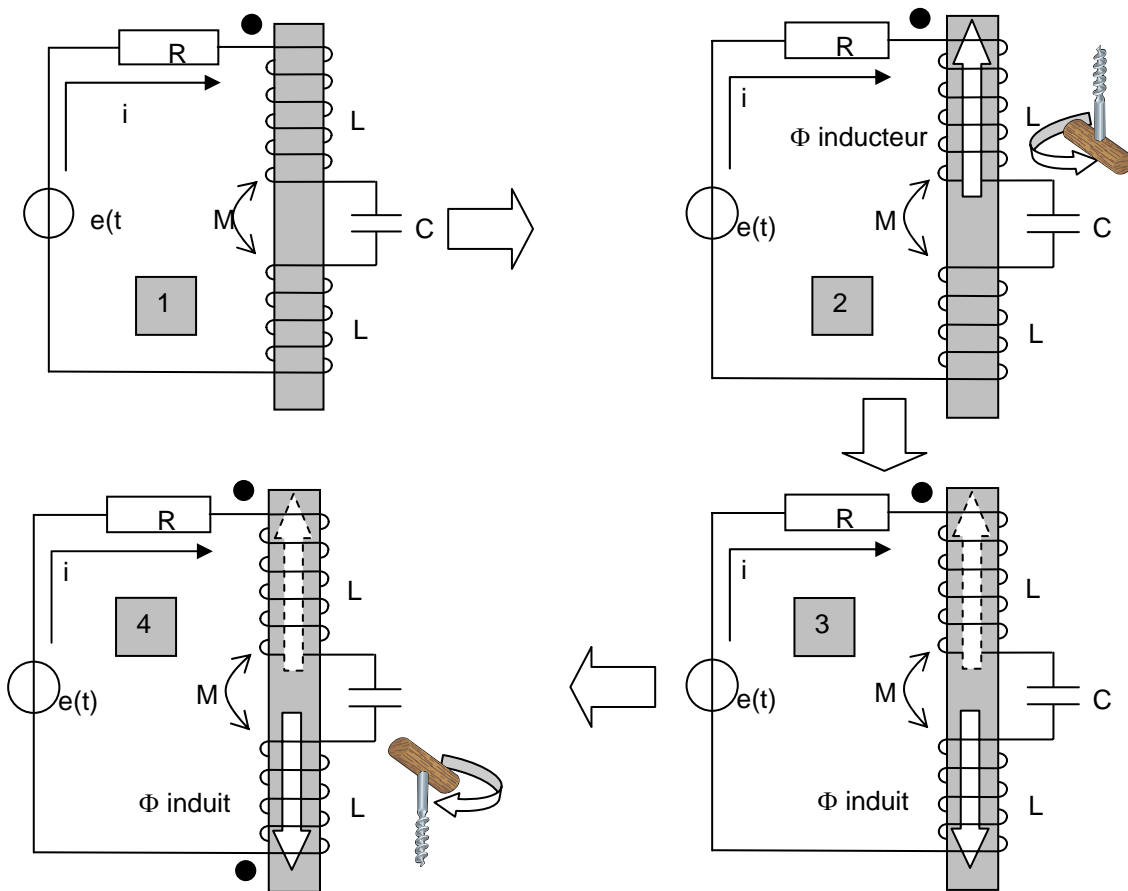


Figure 77

Lorsqu'un des courants (ici c'est le même courant) entre par une extrémité pointée et que le deuxième sort par l'autre extrémité pointée, les signes des termes en M sont opposés à ceux des termes en L.

Par conséquent, on peut écrire :

$$e = Ri + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

$$\text{ou } e = Ri + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt \frac{di}{dt}$$

3. Pour disposer les points sur le circuit équivalent, il suffit de considérer les bobines ainsi que leur sens d'enroulement. On fait alors entrer un courant par l'extrémité supérieure de la bobine gauche; on dispose un point à cette extrémité. Le flux inducteur correspondant est orienté vers le haut du côté gauche du noyau. En vertu de la loi de Lenz, le flux induit dans la bobine de droite doit également être dirigé vers le haut afin de s'opposer au flux inducteur. La règle du tire-bouchon de Maxwell permet alors de déterminer le sens du courant circulant dans la bobine de droite. Ce courant sort de l'enroulement par son extrémité supérieure qui doit alors être marquée d'un point comme le montre le schéma Figure 78 :

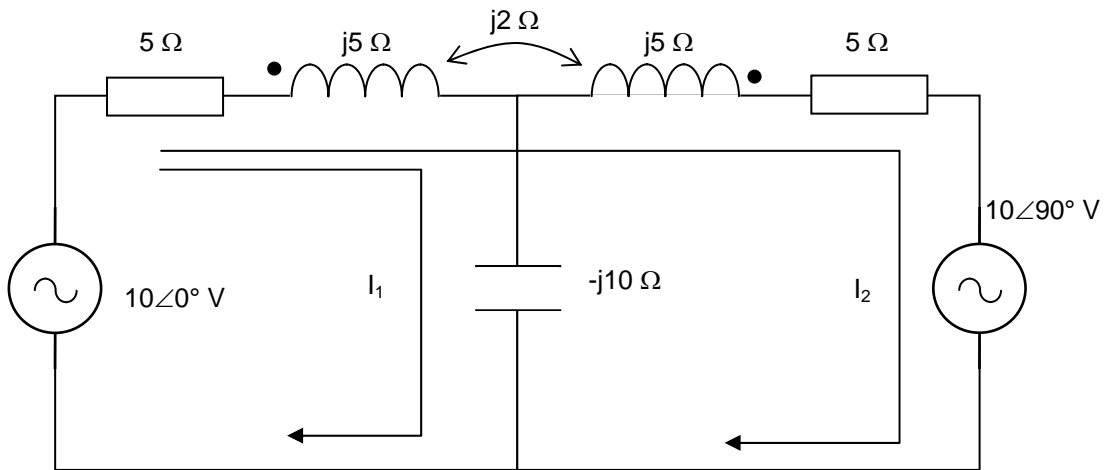


Figure 78

On peut écrire le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} (5 + j5 - j10)I_1 + (-j2 + j5)I_2 = 10 \\ (5 + j5 - j2)I_1 + (5 + 5 + j5 + j5 - j2 - j2)I_2 = 10 - j10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - j5)I_1 + (5 + j3)I_2 = 10 \\ (5 + j3)I_1 + (10 + j6)I_2 = 10 - j10 \end{cases}$$

La première équation est obtenue en écrivant l'équation de la maille suivie par I_1 (R, L_1 et C). La deuxième équation est obtenue en écrivant la l'équation de la maille suivie par I_2 (R, L_1 , L_2 , R, V_2).

On tire de ce système la valeur de $I_1 = 1,015 \angle 113,95^\circ$ A.

La d.d.p. aux bornes du condensateur de réactance $-j10 \Omega$ est donc égale à :

$$V_C = I_1 \times X_C = (1,015 \angle 113,95^\circ) \times (-j10) = 10,15 \angle 23,95^\circ \text{ V}$$

4. En utilisant les mêmes méthodes que dans les exercices précédents,

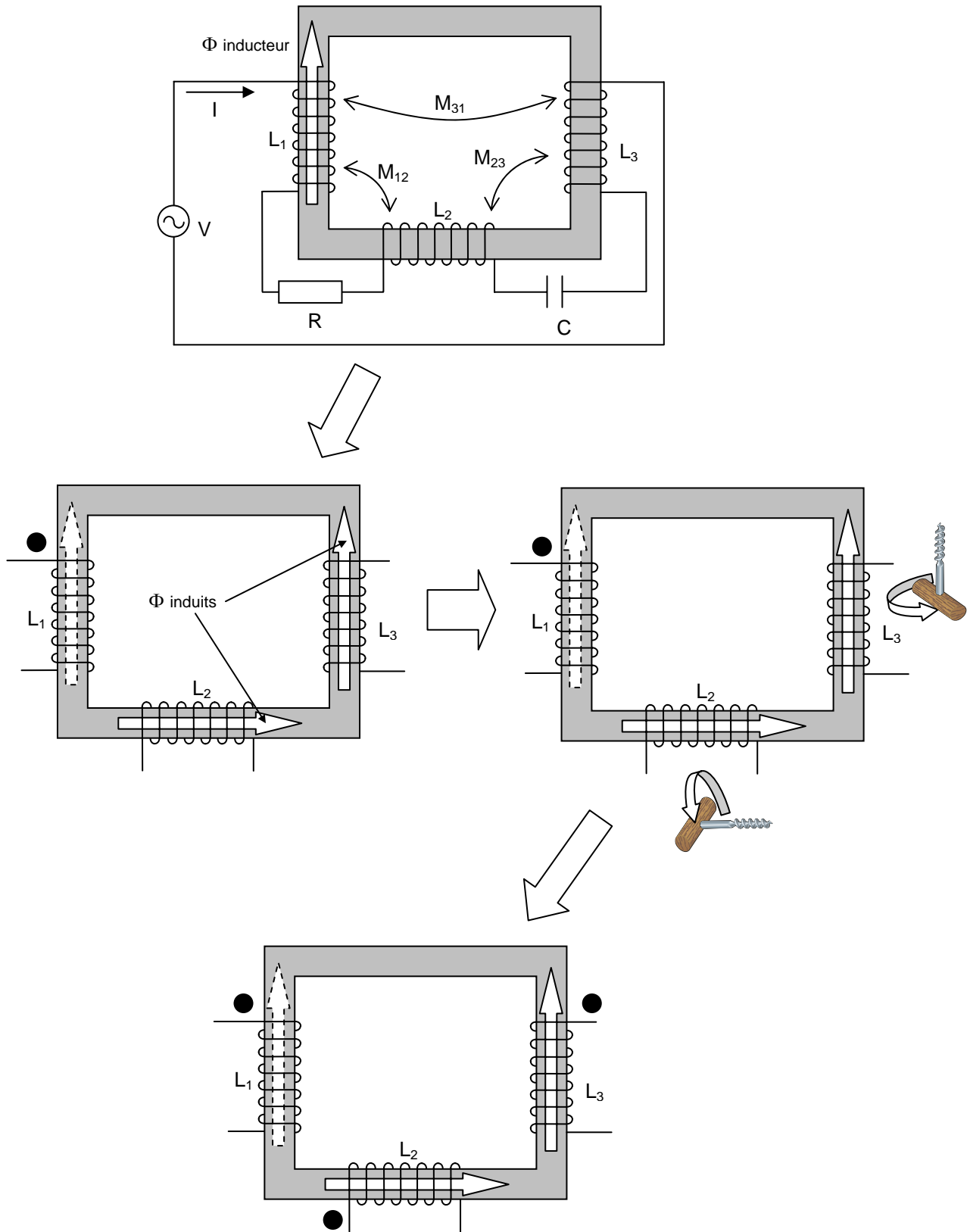


Figure 79

On place des points aux extrémités où sort le courant induit (sens donné par la règle du tire-bouchon de Maxwell).

On obtient le circuit équivalent pointé à maille unique Figure 80 :

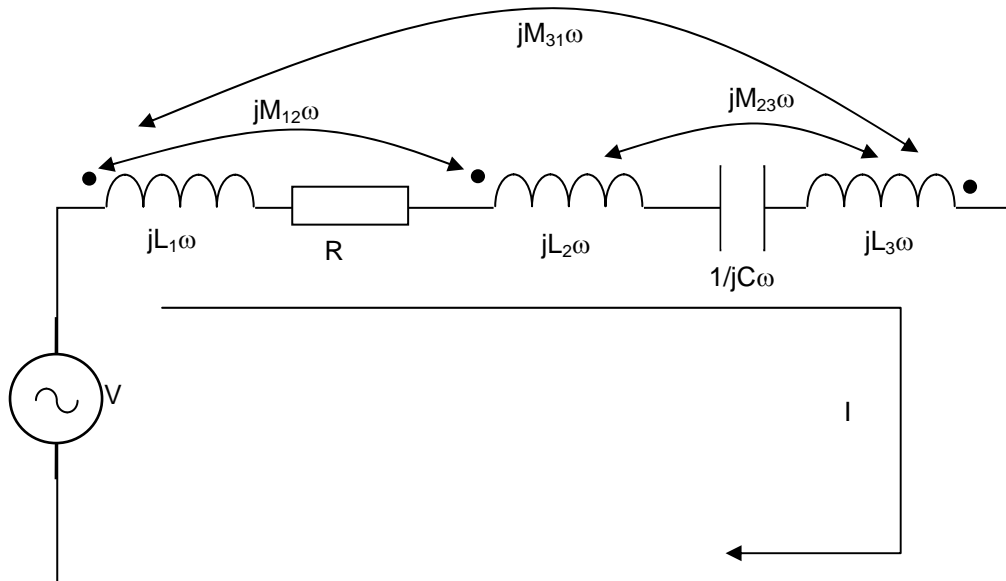


Figure 80

Pour les bobines 1 et 2 : le courant donné, I, entre de la paire de bobines couplées par les extrémités pointées, le signe du terme M_{12} sera identique à ceux des termes L_1 ou L_2 .

Pour les bobines 2 et 3 : le courant entre par une extrémité pointée (bobine 2) et sort par l'autre extrémité pointée de la bobine 3, le signe du terme M_{23} sera opposé à ceux des termes L_2, L_3 .

Pour les bobines 1 et 3 : le courant entre par une extrémité pointée (bobine 1) et sort par l'autre extrémité pointée de la bobine 3, le signe du terme M_{31} sera opposé à ceux des termes en L_1, L_3 .

L'application de la loi de Kirchhoff permet d'obtenir :

$$V = \left[R + \frac{1}{jC\omega} + j\omega(L_1 + L_2 + L_3 + 2M_{12} - 2M_{23} - 2M_{31}) \right] I$$

5. Le flux total est $\Phi_1 = \Phi_{f1} + \Phi_{m1} = 6 \cdot 10^{-4}$ Wb.

L'auto-inductance de la bobine 1 est alors : $L_1 = N_1 \cdot \frac{\Phi_1}{I_1} = 500 \times \frac{6 \cdot 10^{-4}}{5} = 0,06$ H.

Le coefficient de couplage est $k = \frac{\Phi_{m1}}{\Phi_1} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} = 0,667$.

L'inductance mutuelle est : $M = N_2 \cdot \frac{\Phi_{m1}}{I_1} = 1500 \times \frac{4 \cdot 10^{-4}}{5} = 0,12$ H

Par ailleurs, comme on a $M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2}$, on en déduit

$$L_2 = \left(\frac{M}{k \cdot \sqrt{L_1}} \right)^2 = \left(\frac{0,12}{0,667 \times \sqrt{0,06}} \right)^2 = 0,539$$
 H

6. L'inductance mutuelle est : $M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,9 \times \sqrt{0,8 \times 0,2} = 0,36 \text{ H}$

$$M = N_2 \cdot \frac{\Phi_{m1}}{I_1} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{N_1 \cdot \Phi_{m1}}{I_1} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{N_1 \cdot k \cdot \Phi_1}{I_1} = k \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot \left(\frac{N_1 \cdot \Phi_1}{I_1} \right) = k \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot L_1$$

$$\text{Donc : } \frac{N_1}{N_2} = \frac{k \cdot L_1}{M} = \frac{0,9 \times 0,8}{0,36} = 2 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = 0,5$$

Impédances cycliques

Les trois phases de tous les éléments de circuits triphasés (machines synchrones, machines asynchrones, transformateurs, lignes, etc.) sont couplées par des mutuelles inductances. Généralement, ces éléments sont de construction symétrique et on peut étudier une seule phase, comme si les autres n'existaient pas, à l'aide du schéma monophasé équivalent.

Prenons l'exemple d'un récepteur résistif et inductif dont les trois phases sont couplées par des mutuelles inductances (Figure 81):

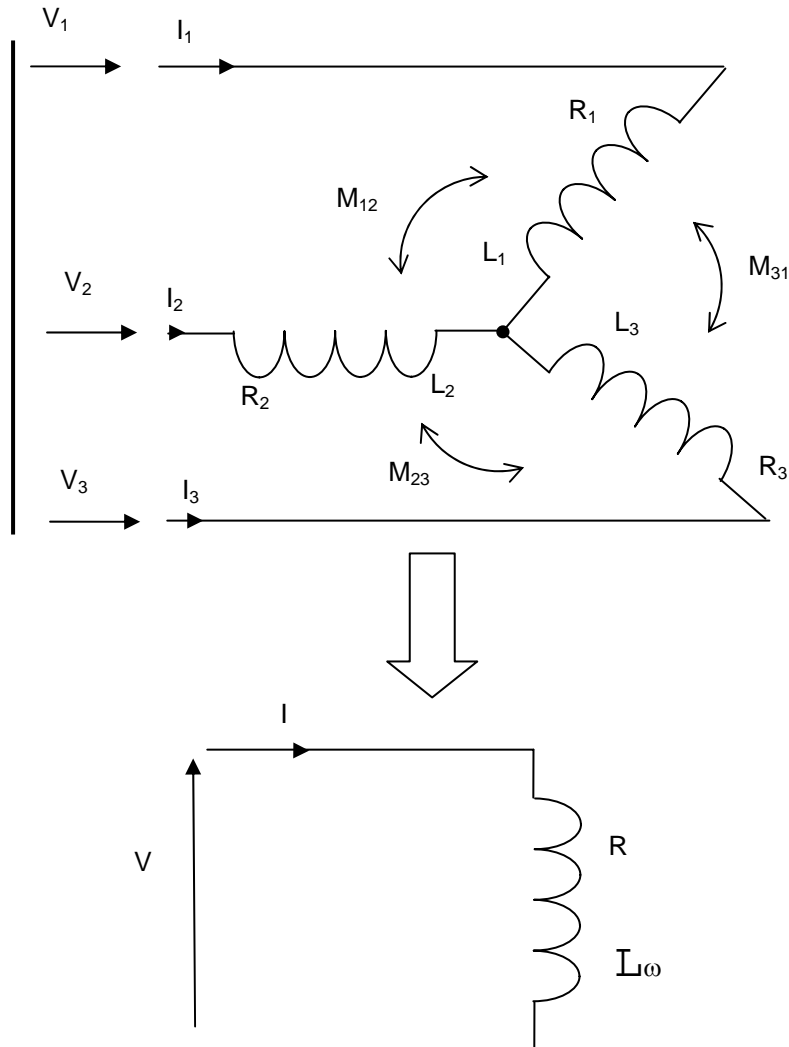


Figure 81

Les équations des tensions des trois phases sont :

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = R_1 \underline{I}_1 + jL_1 \omega \underline{I}_1 + jM_{12} \omega \underline{I}_2 + jM_{31} \omega \underline{I}_3 \\ \underline{V}_2 = R_2 \underline{I}_2 + jL_2 \omega \underline{I}_2 + jM_{12} \omega \underline{I}_1 + jM_{23} \omega \underline{I}_3 \\ \underline{V}_3 = R_3 \underline{I}_3 + jL_3 \omega \underline{I}_3 + jM_{31} \omega \underline{I}_1 + jM_{23} \omega \underline{I}_2 \end{cases}$$

Si les trois phases sont de construction symétrique :

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R; \\ L_1 &= L_2 = L_3 = L; \\ M_{12} &= M_{23} = M_{31} = M \end{aligned}$$

Les équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = (R + jL\omega)\underline{I}_1 + jM\omega(\underline{I}_2 + \underline{I}_3) \\ \underline{V}_2 = (R + jL\omega)\underline{I}_2 + jM\omega(\underline{I}_3 + \underline{I}_1) \\ \underline{V}_3 = (R + jL\omega)\underline{I}_3 + jM\omega(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces équations, nous obtenons :

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = (R + jL\omega + 2jM\omega)(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3)$$

Cela montre que si $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ forment un système équilibré, donc de somme nulle, la somme des courants $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ est nulle.

En remplaçant $\underline{I}_2 + \underline{I}_3$ par $-\underline{I}_1$, $\underline{I}_3 + \underline{I}_1$ par $-\underline{I}_2$, $\underline{I}_1 + \underline{I}_2$ par $-\underline{I}_3$, les équations des tensions deviennent :

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = (R + jL\omega - jM\omega)\underline{I}_1 \\ \underline{V}_2 = (R + jL\omega - jM\omega)\underline{I}_2 \\ \underline{V}_3 = (R + jL\omega - jM\omega)\underline{I}_3 \end{cases}$$

On écrira, sans préciser l'indice de la phase :

$$\underline{V} = (R + jL\omega - jM\omega)\underline{I} = (R + \underline{L}\omega) \underline{I}, \text{ ou } \underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$$

$\underline{L}\omega = (L - M)\omega$ est la réactance cyclique, \underline{Z} l'impédance cyclique de ce récepteur.

En triphasé, sauf précision contraire, les inductances, capacités, réactances, impédances, admittances qu'on indique sont des grandeurs cycliques.

ATTENTION : L'inductance cyclique d'un système triphasé d'enroulements, n'a de sens que si les enroulements sont parcourus par des courants dont la somme est nulle. Dans ce cas, elle permet d'exprimer la contribution des courants circulant dans les trois enroulements au flux intercepté par un enroulement en fonction du seul courant circulant dans cet enroulement.

Couplage par dispersion

Considérons deux circuits bobinés, de résistance négligeable, d'inductances propres et mutuelle L_1 , L_2 , M , dont l'un est alimenté par une source alternative (circuit 1, Figure 82) et l'autre est en court-circuit (circuit 2, Figure 82).

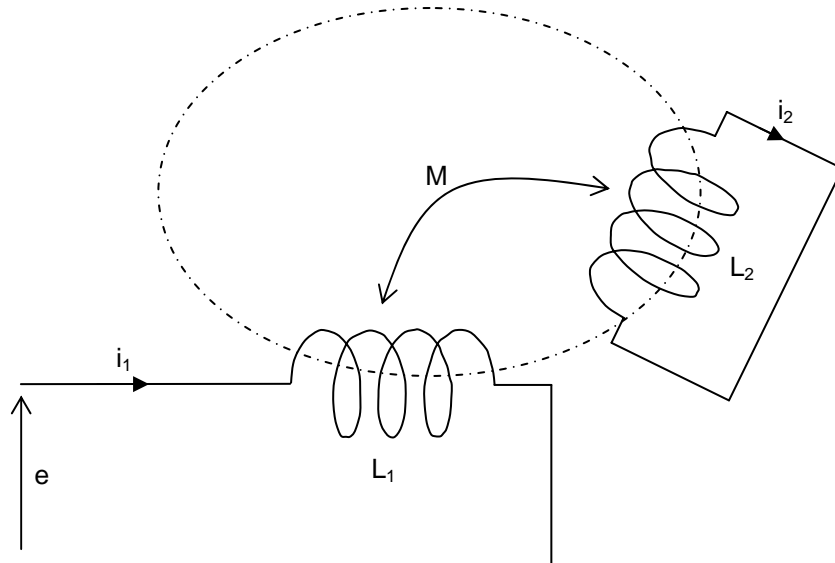


Figure 82

Si le circuit 2 est suffisamment éloigné du circuit 1, il n'y a pas d'influence mutuelle et la loi de Faraday s'écrit simplement, pour le circuit 1 :

$$e = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Maintenant, si le circuit 2 en court-circuit est placé à côté du circuit 1, il y aura alors échange de flux entre les deux circuits et un courant induit i_2 circulera dans le circuit 2.

Les lois de Faraday s'écriront alors, en désignant par M l'inductance mutuelle :

$$\begin{cases} e = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Nous pouvons calculer l'inductance équivalente du circuit 1 en éliminant i_2 entre les deux équations précédentes. On obtient :

$$e = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

En introduisant le "coefficient de dispersion" σ des deux circuits, il vient :

$$e = \sigma L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Cette équation montre que l'effet de la présence du circuit 2 sur le circuit 1 est de **modifier son inductance propre L_1 , pour la transformer en σL_1** .

Cette inductance σL_1 s'appelle "l'inductance de dispersion".

$$L_{disp} = \sigma L_1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \quad (1.67)$$

Cette inductance joue un rôle important dans la théorie des machines asynchrones, elle intervient dans l'expression du couple électromagnétique.

Couplage sur un circuit magnétique quelconque

Deux circuits électriques peuvent être couplés par un circuit magnétique quelconque, par exemple celui de la Figure 83 comportant 3 branches.

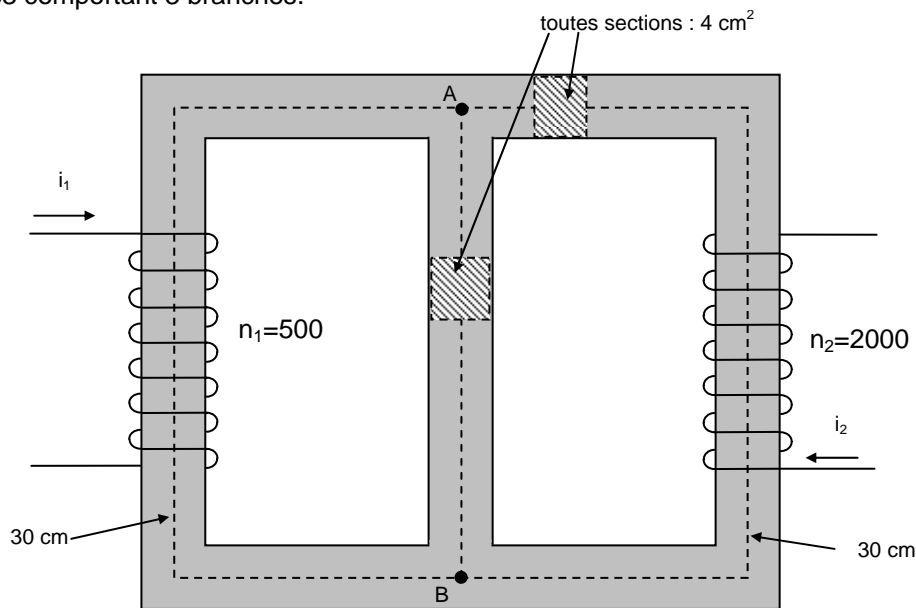


Figure 83

On peut théoriquement calculer directement les inductances des circuits, puisque ce sont des paramètres géométriques reliés aux réluctances des diverses parties du circuit magnétique.

Supposons que le circuit magnétique de la Figure 83 soit de perméabilité constante $\mu_r = 2000$, que les nombres de spires soient respectivement $n_1 = 500$ et $n_2 = 2000$ et que les fuites de flux dans l'air soient négligeables (tout le flux produit par le circuit 1 ne traverse pas le circuit 2 puisqu'une partie Φ_{f1} de ce flux passe dans la branche centrale).

Calculons les inductances propres et mutuelles L_1 , L_2 , M et les coefficients de couplage et de dispersion. Les dimensions étant données, on peut calculer directement les réluctances des branches de droite et de gauche :

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{0,3}{2 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^{-4}} = 3 \times 10^5 \text{ At/Wb}$$

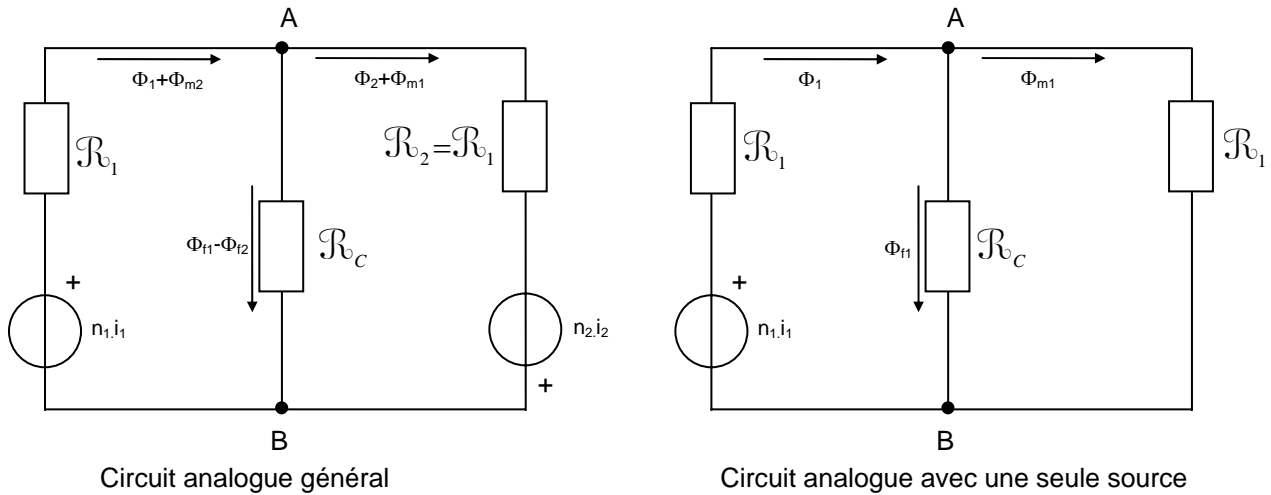


Figure 84

Le circuit équivalent de Hopkinson est dessiné Figure 84. On voit que, pour calculer les différents flux, il est nécessaire d'isoler les sources. En supprimant $n_2 i_2$ par exemple, on obtient le circuit équivalent (Figure 84 à droite) dont les équations sont :

$$\begin{cases} n_1 i_1 = \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_c \Phi_{f1} = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_c) \Phi_{f1} + \mathcal{R}_1 \Phi_{m1} \\ \mathcal{R}_c \Phi_{f1} = \mathcal{R}_1 \Phi_{m1} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \Phi_{f1} = \frac{n_1 i_1}{2\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_1} \\ \Phi_{m1} = \frac{n_1 i_1}{2\mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_1^2}{\mathcal{R}_c}} \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} l_1 = n_1 \frac{\Phi_{f1}}{i_1} = \frac{n_1^2}{2\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_1} = \frac{25 \times 10^4}{6 \times 10^5} = 0,416 \text{ H} \\ L_{mag1} = n_1 \frac{\Phi_{m1}}{i_1} = \frac{n_1^2}{2\mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_1^2}{\mathcal{R}_c}} = \frac{25 \times 10^4}{12 \times 10^5} = 0,208 \text{ H} \end{cases}$$

D'après la formule de définition concernant l'inductance mutuelle M_2 (égale à M) (1.58) :

$$M_2 = n_2 \frac{\Phi_{m1}}{i_1} = L_{mag1} \times \frac{n_2}{n_1} = 0,832 \text{ H}$$

On calculerait de même les inductances concernant le circuit 2, en supprimant la source $n_1 i_1$ dans le circuit de Hopkinson :

$$\begin{cases} l_2 = 6,67 \text{ H} \\ L_{\text{mag}2} = 3,34 \text{ H} \\ M_1 = 0,832 \text{ H} \end{cases}$$

Les valeurs demandées sont donc (d'après (1.55)) :

$$L_1 = 0,624 \text{ H}, L_2 = 10,01 \text{ H}, M = 0,832 \text{ H}.$$

Le coefficient de couplage vaut :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0,832}{\sqrt{6,24}} = 0,333$$

et le coefficient de dispersion vaut :

$$\sigma = 1 - k^2 = 0,889$$

Amplificateur magnétique

On a utilisé jusque dans les années 1980 les amplificateurs magnétiques, ils permettaient de contrôler la puissance consommée dans une charge Z en agissant sur le rhéostat du circuit de contrôle.

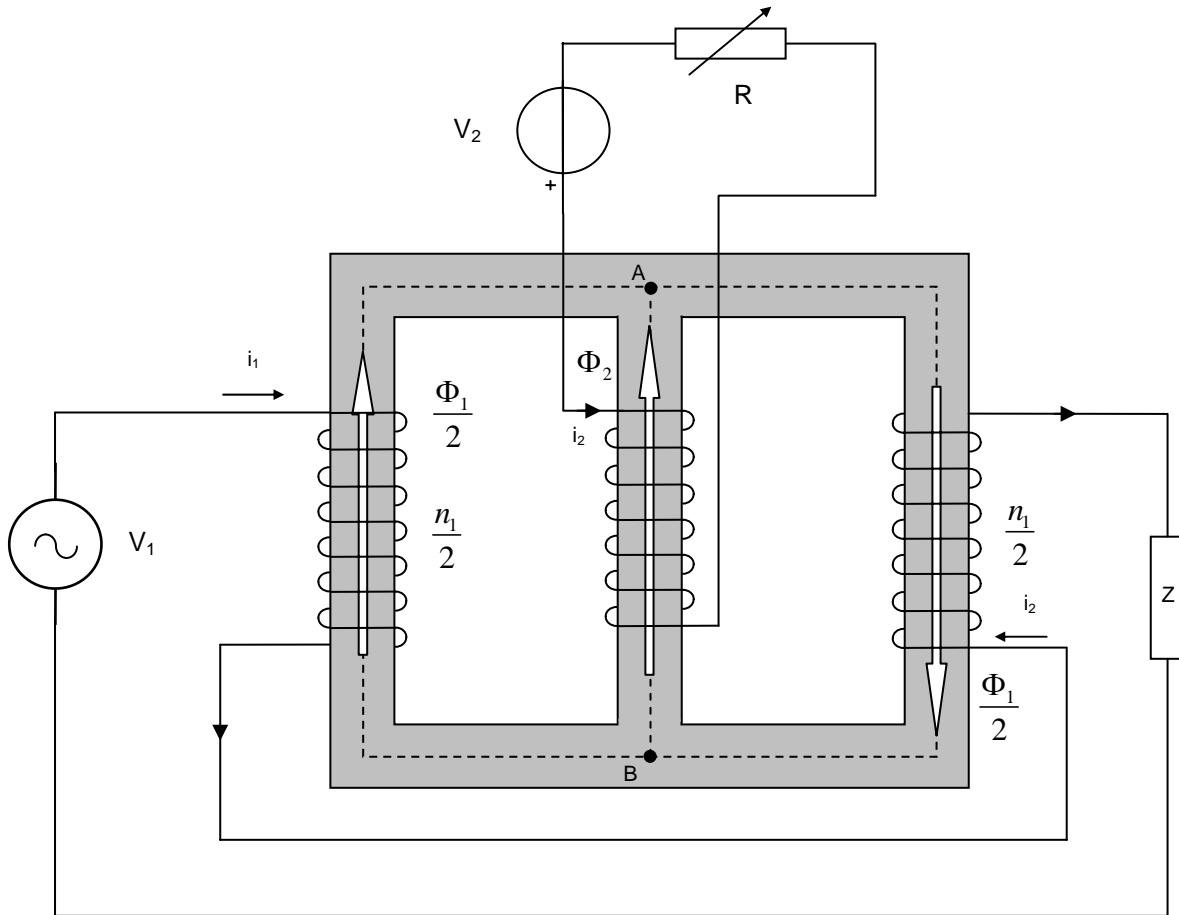


Figure 85

Le noyau d'un amplificateur magnétique porte deux enroulements (Figure 85).

1. Un "circuit de puissance", alimenté par une source de tension alternative V_1 et donc parcouru par un courant alternatif. Ce circuit comporte la moitié de ses spires $\frac{n_1}{2}$ sur la branche de gauche, et l'autre moitié $\frac{n_1}{2}$ sur la branche de droite ; il est bobiné de telle sorte que les flux alternatifs $\frac{\Phi_1}{2}$ soient à chaque instant dirigés dans le même sens le long de la carcasse.

2. Un "circuit de contrôle" parcouru par un courant continu I_2 , que l'on peut ajuster au moyen d'un rhéostat R, et dont toutes les spires n_2 sont sur la branche centrale.

On peut faire varier la puissance consommée dans la charge Z du circuit de puissance en agissant sur le rhéostat du circuit de contrôle. On constate en effet que :

a) Les 2 circuits sont ici entièrement découplés: aucun flux alternatif Φ_1 dû au courant I_1 ne passe dans la branche centrale (puisque, quelle que soit l'alternance, la différence de potentiel magnétique entre A et B est nulle, si les réluctances des branches de droite et de gauche sont égales). Il n'y a par conséquent aucune f.é.m. induite dans le circuit de contrôle.

b) Le flux Φ_2 dû au courant continu I_2 se répartit en deux parties égales le long des branches de droite et de gauche, et sature plus ou moins le noyau. L'inductance dynamique L_1 du circuit de puissance (alternatif) varie donc selon l'état de saturation.

La figure 63 montre les variations du flux alternatif Φ_1 , superposé au flux continu Φ_2 , pour deux valeurs $n_2 I_2$ d'excitation du circuit de contrôle :

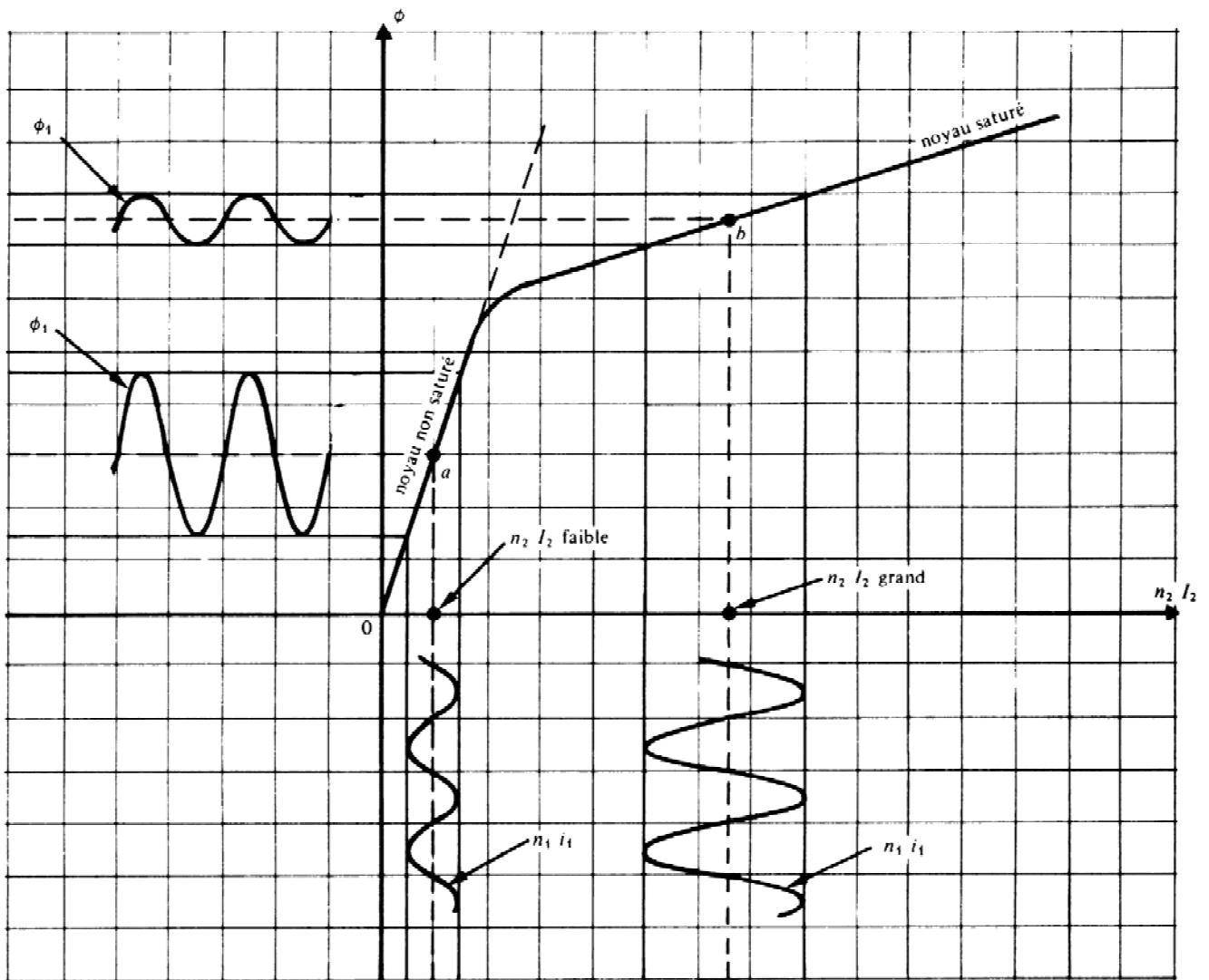


Figure 86

Lorsque le noyau n'est pas saturé (f.m.m. $n_2 I_2$ faible, point a, figure ci-dessus), l'inductance L_1 possède

une valeur importante et le courant i_1 est faible, en valeur efficace, il vaut : $I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{Z^2 + \omega^2 L_1^2}}$.

Lorsque le noyau est saturé (f.m.m. $n_2 I_2$ grande, point b, figure ci-dessus), l'inductance L_1 est pratiquement nulle et le courant i_1 a une valeur qui ne dépend que de Z (en valeur efficace $I_1 = \frac{V_1}{Z}$). Tout se passe comme si le noyau n'existait plus.

La Figure 87 montre comment varie I_1 dans le circuit de puissance en fonction de la f.m.m. de contrôle. Signalons que, dans la pratique industrielle, les amplificateurs n'étaient pas utilisés exactement comme nous l'avons décrit. On leur adjoignait d'autres circuit destinés à améliorer leurs performances : circuit de "feed-back" pour la puissance et circuit de polarisation pour la linéarité.

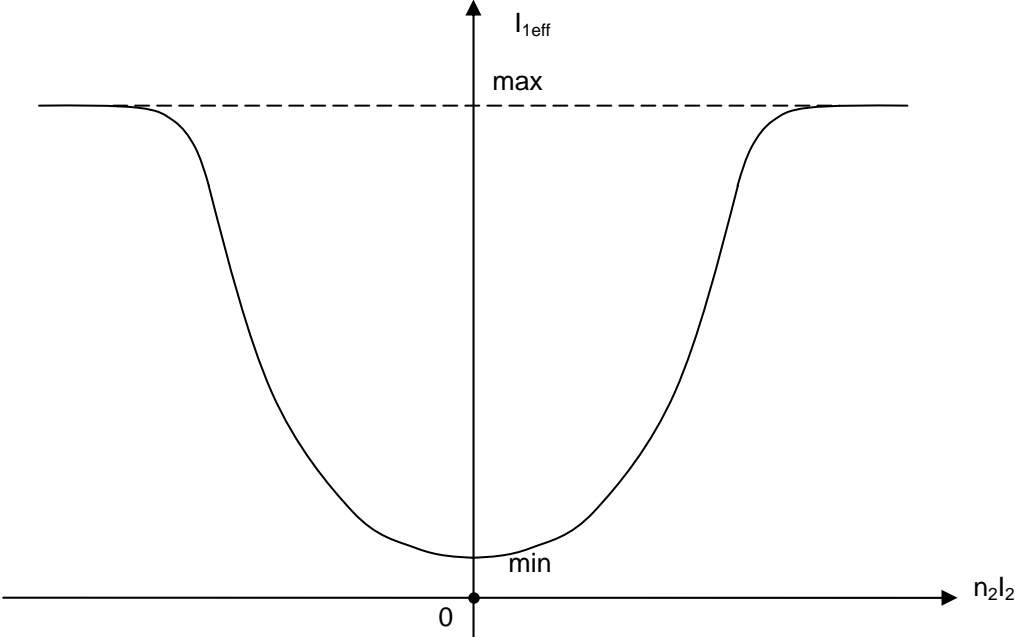


Figure 87

Les électroaimants

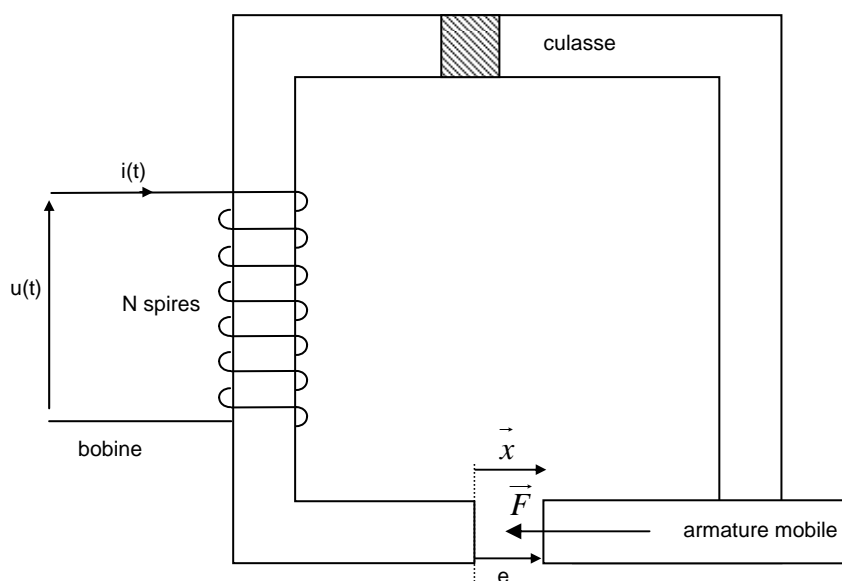
Les électroaimants constituent les "moteurs" des actionneurs "tout ou rien" que sont les contacteurs, les freins électromagnétiques, les déclencheurs magnétiques situés dans les disjoncteurs, les électrovannes, etc.

Constitution

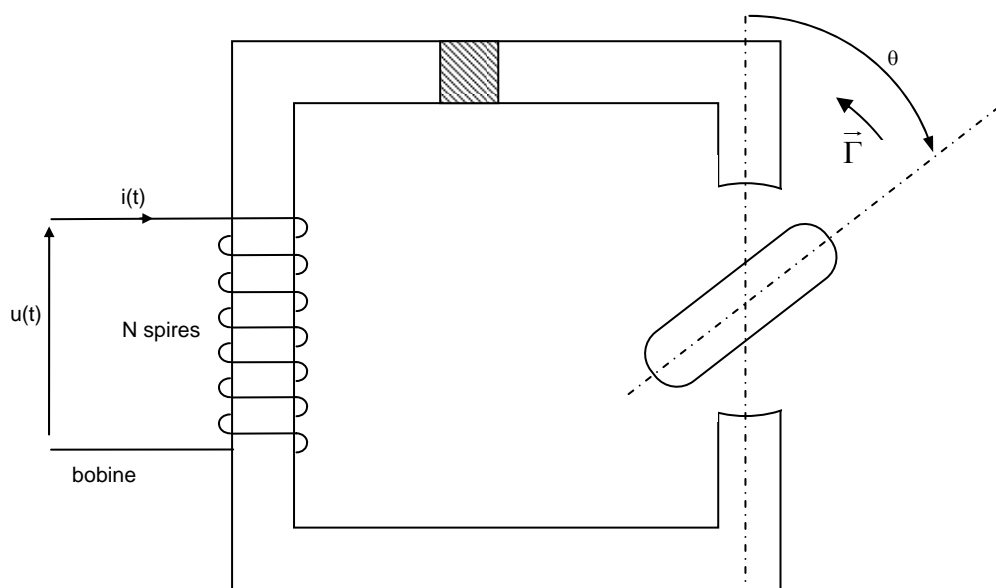
Un électroaimant est un dispositif destiné à exercer des forces (ou couples) d'attraction sur une pièce ferromagnétique en vue de lui transmettre un mouvement de translation ou de rotation.

Son circuit magnétique, déformable, est généralement constitué d'une **culasse** fixe, entourée d'une ou de plusieurs bobines magnétisantes et d'une **armature mobile**.

Lorsque la bobine est alimentée, l'armature mobile se déplace de manière à ce que le flux soit le plus grand possible, en diminuant la réluctance globale du circuit magnétique, c'est-à-dire en diminuant l'entrefer (c'est l'effet de l'application de la règle du flux maximum).



Électroaimant linéaire armature : en translation



Électroaimant rotatif : armature en rotation

Electroaimants alimentés par une tension continue

Nous n'étudierons ici que l'électroaimant linéaire avec les hypothèses suivantes :

- le courant dans le bobinage est constant ($i(t) = I$) et s'établit instantanément;
- le circuit magnétique est parfait (matériau linéaire, pas de fuite);
- la section des deux pièces (culasse et armature) est S ;
- l'entrefer est supposé étroit : e faible $\Rightarrow S_e = S \Rightarrow B_e = B$;
- toute l'énergie électromagnétique est localisée dans l'entrefer : $\mathcal{R}_{fer} \ll \mathcal{R}_{entrefer}$;
- les déplacements de l'armature mobile selon l'axe \vec{x} sont toujours faibles devant e , ainsi, pour un déplacement infiniment petit de l'armature mobile, soit " de ", l'induction B_e ne varie pas.

Expression de la force d'attraction

On peut assimiler la variation d'énergie électromagnétique dW_e dans l'entrefer lors d'un déplacement " de " de cet entrefer, au travail de la force appliquée sur l'armature mobile :

$$dW_e = F \cdot de$$

$$\text{avec : } W_e = \frac{1}{2} V_e B_e H_e = V_e \frac{B_e^2}{2\mu_0} = V_e \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{cf (1.46)})$$

Où V_e représente le volume de l'entrefer, soit : $V_e = S_e \cdot e = S \cdot e$

On en déduit que :

$$dW_e = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot dV_e = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \cdot de = F \cdot de \Rightarrow \boxed{F = \frac{B^2 S}{2\mu_0}} \quad (\text{formule de Maxwell})$$

On remarque que F est apparemment indépendante de e . En fait, e intervient sur l'intensité du champ B créé par l'intermédiaire de la réluctance du circuit magnétique. La loi d'Hopkinson s'écrit :

$$NI = (\mathcal{R}_{fer} + \mathcal{R}_{entrefer}) \cdot \Phi \simeq \mathcal{R}_{entrefer} \cdot \Phi \simeq \mathcal{R}_{entrefer} \cdot B \cdot S$$

$$\text{Or, } \mathcal{R}_{entrefer} = \frac{e}{\mu_0 S_e} = \frac{e}{\mu_0 S} \Rightarrow B_{(e)} \simeq \frac{\mu_0 NI}{e}$$

$$\text{Cela conduit à : } F_{(e)} \simeq \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2e^2}$$

Posons $e = e_0 + x$, où e_0 est la partie constante de l'entrefer (à $x = 0$).

La force précédente s'écrit désormais (pour $x \geq 0$) :

$$F_{(x)} \simeq \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2(e_0 + x)^2}$$

Cette force est d'autant plus faible que l'entrefer est important.

Electroaimants alimentés par une tension alternative sinusoïdale

Ici, également, nous n'étudierons ici que l'électroaimant linéaire avec l'hypothèse du flux forcé (le flux maximal ne dépend que de la valeur efficace U de la tension d'alimentation) dans le circuit magnétique parfait (pas de fuite, résistance électrique de la bobine nulle). On obtient :

$$u(t) = \underbrace{Ri(t) + l_f \frac{di(t)}{dt}}_{\approx 0} + N \frac{d\varphi(t)}{dt} \approx N \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Expression de la force d'attraction

La bobine est alimentée par une tension alternative sinusoïdale : $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t)$

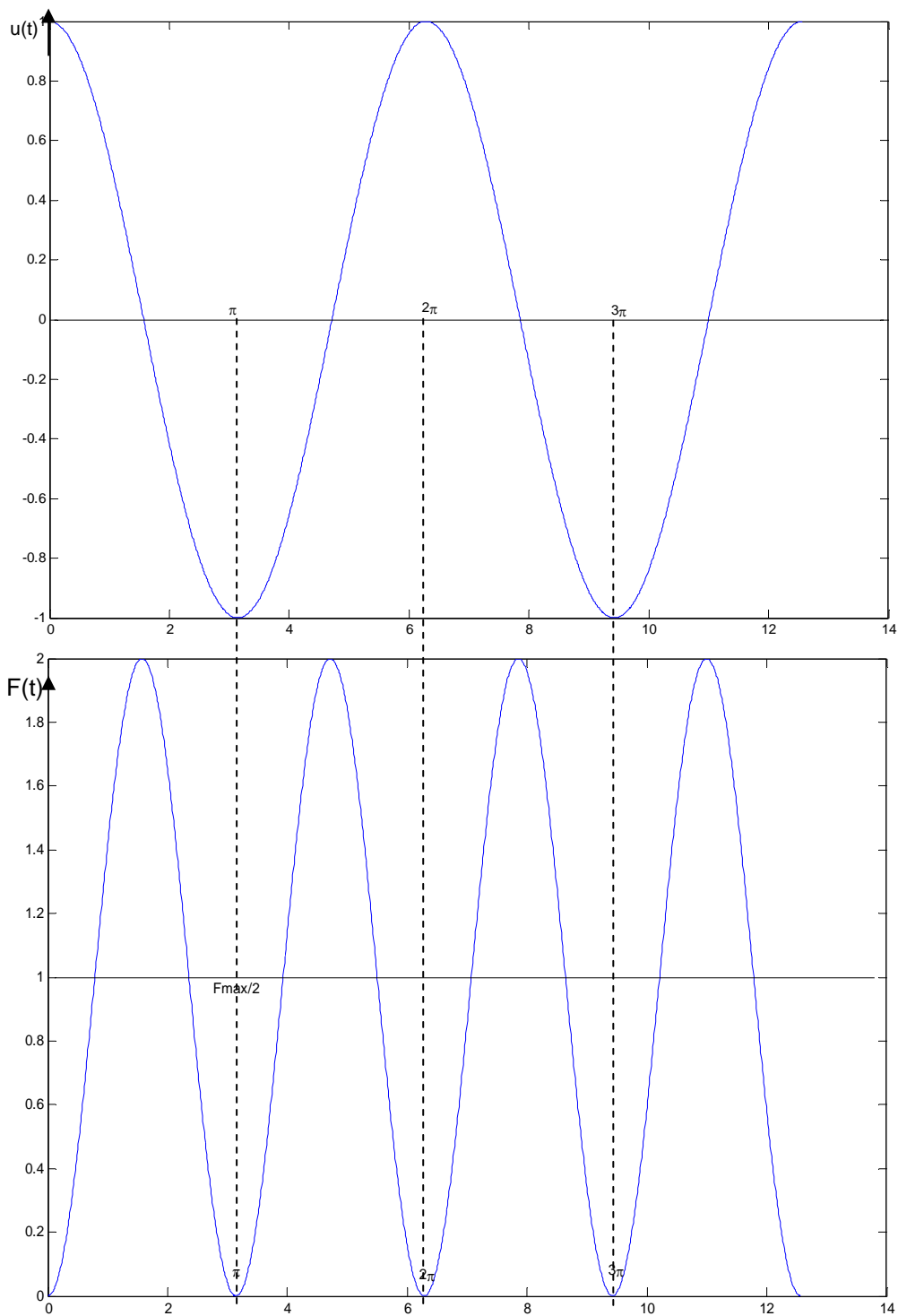
Avec l'hypothèse du flux forcé : $\varphi(t) = \frac{U\sqrt{2}}{N\omega} \cdot \sin(\omega t)$, avec $\varphi(0) = 0$.

Soit un champ magnétique : $B(t) = \frac{\varphi(t)}{S} = \frac{U\sqrt{2}}{SN\omega} \cdot \sin(\omega t) = B_{\max} \cdot \sin(\omega t)$

La force d'attraction s'exprime par : $F(t) = \frac{B(t)^2 S}{2\mu_0} = \frac{B_{\max}^2 S}{2\mu_0} \cdot \sin^2(\omega t)$

Ce qui s'exprime également par : $F(t) = \frac{B_{\max}^2 S}{4\mu_0} \cdot (1 - \cos(2\omega t))$

Cette force fluctue entre 0 et $F_{\max} = \frac{B_{\max}^2 S}{2\mu_0}$ avec une pulsation 2ω . Sa valeur moyenne est $\frac{F_{\max}}{2}$.



A une fréquence de 50 Hz, $F(t)$ s'annule 100 fois par seconde. La vibration de cette force a deux inconvénients :

- si l'électroaimant maintient une masse (ou à fermer un relais), il y a risque de relâchement à chaque passage à zéro de la force;
- ses fluctuations sont la source de vibrations dans le domaine audible (100 Hz), qui peuvent s'avérer désagréables à long terme.

La **spire de Frager** permet de s'affranchir de ces inconvénients. Il s'agit d'une bague rectangulaire en cuivre ou en laiton, disposée sur le circuit magnétique à proximité de l'entrefer. Cette bague modifie la répartition du flux au voisinage de l'entrefer, ce qui permet de rendre constante en module la force F .

Spire de Frager : obtention d'une force constante

Effet d'une spire fermée placée dans un flux variable $\varphi(t)$

Soit R la résistance de la spire et L son inductance. La variation du flux $\varphi(t)$ induit dans la spire une force contre électromotrice $e_{\text{induit}}(t)$ telle que :

$$e_{\text{induit}}(t) = -\frac{d\varphi(t)}{dt} \Rightarrow \underline{E}_{\text{induit}} = -j\omega \cdot \underline{\Phi} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{\text{induit}} \Rightarrow \underline{I}_{\text{induit}} = \frac{-j\omega}{R + jL\omega} \cdot \underline{\Phi}$$

où $\underline{Z} = R + jL\omega$ est l'impédance complexe de la spire et $\underline{I}_{\text{induit}}$ la valeur efficace du courant induit dans la spire.

Le courant $\underline{I}_{\text{induit}}$ créé à son tour un flux dans la spire : $\varphi_{\text{induit}}(t) = L \cdot i_{\text{induit}}(t) \Rightarrow \underline{\Phi}_{\text{induit}} = L \cdot \underline{I}_{\text{induit}}$

Le flux total traversant la spire est donc : $\varphi_{\text{total}}(t) = \varphi(t) + \varphi_{\text{induit}}(t) \Rightarrow \underline{\Phi}_{\text{total}} = \underline{\Phi} + \underline{\Phi}_{\text{induit}}$

Représentons le diagramme de Fresnel des tensions et des flux d'une spire court-circuitée en prenant comme origine des phases celle de $\varphi(t)$.

L'angle entre $\underline{\Phi}_{\text{total}}$ et $\underline{\Phi}_{\text{induit}}$ est un angle droit. En effet :

$$\underline{\Phi}_{\text{total}} = \underline{\Phi} + \underline{\Phi}_{\text{induit}} = \frac{R + jL\omega}{-j\omega} \cdot \underline{I}_{\text{induit}} + L \cdot \underline{I}_{\text{induit}} = -\frac{R}{j\omega} \cdot \underline{I}_{\text{induit}} = \frac{j}{j} \cdot -\frac{R}{j\omega} \cdot \frac{L}{L} \cdot \underline{I}_{\text{induit}} = j \frac{R}{L\omega} \cdot \underline{\Phi}_{\text{induit}}$$

$\varphi_{\text{total}}(t)$ est donc en quadrature avance sur $\varphi_{\text{induit}}(t)$.

Si $R = L\omega$, les modules de $\underline{\Phi}_{\text{total}}$ et $\underline{\Phi}_{\text{induit}}$ sont égaux.

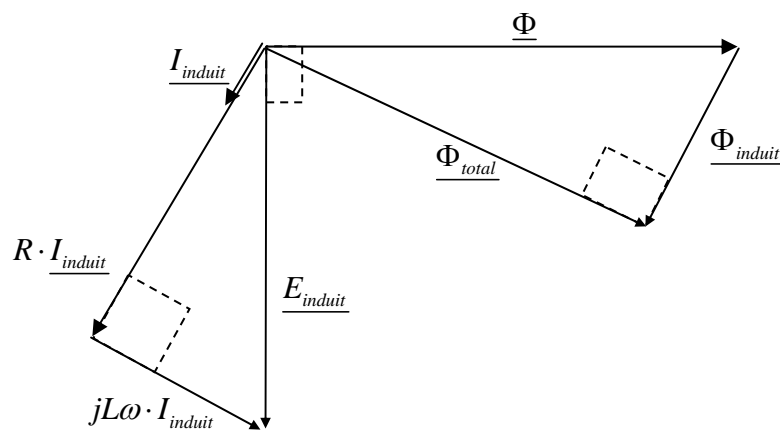


Figure 88

Application à l'électroaimant

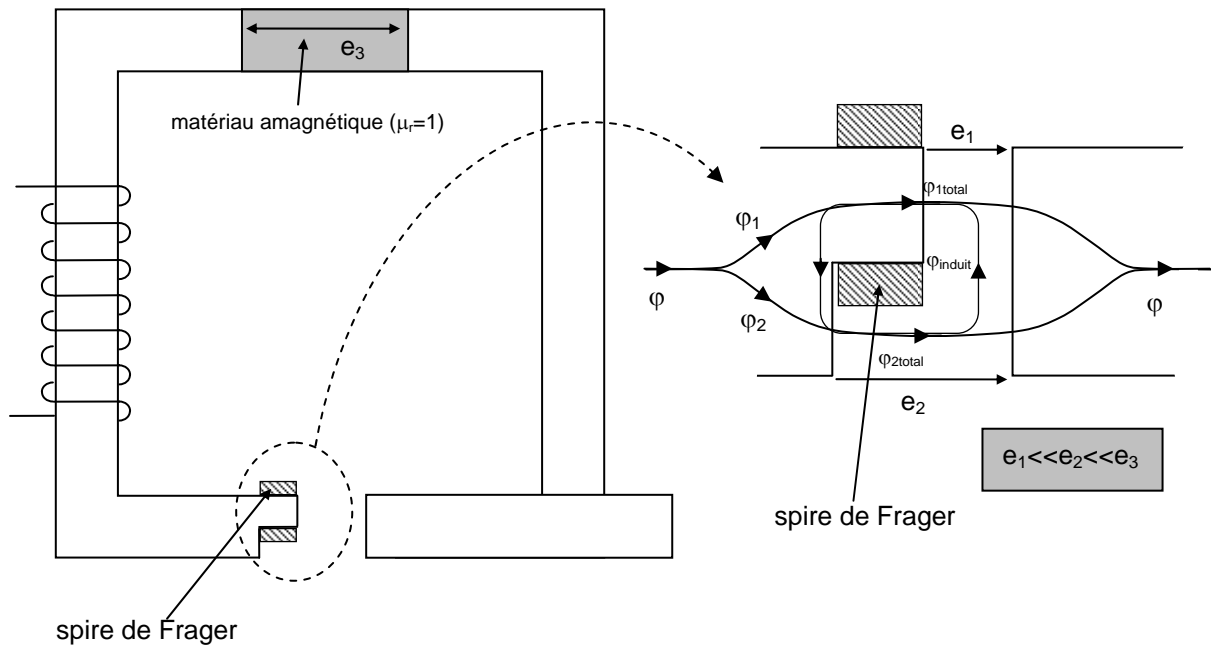


Figure 89

Notations utilisées dans la Figure 89 :

φ flux principal;

φ_1 flux créé par la bobine, traversant l'entrefer d'épaisseur e_1 ;

φ_2 flux créé par la bobine, traversant l'entrefer d'épaisseur e_2 ;

φ_{induit} flux induit créé par la spire de Frager placée dans le flux variable φ_1 ;

$\varphi_{1\text{total}}$ flux total traversant l'entrefer 1 : $\varphi_{1\text{total}}(t) = \varphi_1(t) - \varphi_{\text{induit}}(t)$ (loi des nœuds);

$\varphi_{2\text{total}}$ flux total traversant l'entrefer 2 : $\varphi_{2\text{total}}(t) = \varphi_2(t) + \varphi_{\text{induit}}(t)$ (loi des nœuds).

Les réluctances des deux entrefers sont inégales car $e_1 \ll e_2$. Par conséquent :

$$\mathcal{R}_{\text{entrefefer1}} \ll \mathcal{R}_{\text{entrefefer2}} \Rightarrow |\Phi_1| \gg |\Phi_2| \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \approx \varphi_1(t)$$

Le flux induit $\varphi_{\text{induit}}(t)$ a le choix entre le chemin indiqué sur la Figure 89 ou le tour complet de la culasse. Etant donné que $e_3 \gg e_2 \gg e_1$, la majeure partie de $\varphi_{\text{induit}}(t)$ passe par le chemin le plus court indiqué à la partie de droite de la Figure 89.

On choisit la résistance de la spire telle que $R = L\omega$. Dans ces conditions, on a :

$$|\Phi_{\text{induit}}| = |\Phi_{1\text{total}}| = \frac{|\Phi_1|}{\sqrt{2}}$$

Comme $|\Phi_1| \gg |\Phi_2|$ alors $|\Phi_{\text{induit}}| \gg |\Phi_2|$ donc : $\varphi_{2\text{total}}(t) = \varphi_2(t) + \varphi_{\text{induit}}(t) \approx \varphi_{\text{induit}}(t)$

$\varphi_{2\text{total}}(t)$ est donc en quadrature retard sur $\varphi_{1\text{total}}(t)$.

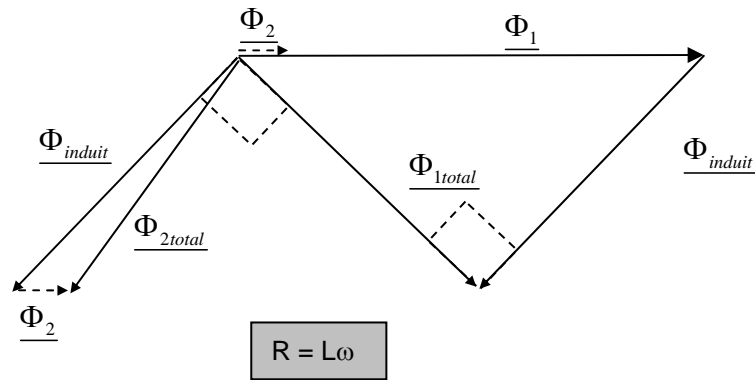


Figure 90

En prenant comme nouvelle origine des phases celle de $\varphi_{1total}(t)$, les flux $\varphi_{1total}(t)$ et $\varphi_{2total}(t)$ s'expriment par :

$$\begin{cases} \varphi_{1total} = \Phi_{1max} \cdot \sin(\omega t) \\ \varphi_{2total} = \Phi_{2max} \cdot \sin(\omega t + \theta) \end{cases} \text{ avec } \Phi_{1max} \approx \Phi_{2max} = \frac{\Phi_{max}}{\sqrt{2}} \text{ et } \theta \approx \frac{\pi}{2}$$

où Φ_{max} est la valeur maximale du flux principal $\varphi(t)$, donc celle de $\varphi_1(t)$ également ($\varphi(t) \approx \varphi_1(t)$).

La force d'attraction $F(t)$ est la somme des forces qui s'exercent dans les entrefers 1 et 2. Elle s'écrit :

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{\varphi_{1total}^2(t)}{S_1} + \frac{\varphi_{2total}^2(t)}{S_2} \right] \text{ où } S_1 \text{ et } S_2 \text{ sont les sections effectives des}$$

entrefers 1 et 2. On admet que $S_1 \approx S_2 = \frac{S}{2}$ avec S section de la culasse de l'électroaimant.

$$\text{Ainsi : } F(t) \approx \frac{\Phi_{max}^2}{2\mu_0 S} \cdot \left[\sin^2(\omega t) + \sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\Phi_{max}^2}{2\mu_0 S} \cdot \underbrace{\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) \right]}_{=1} = \frac{\Phi_{max}^2}{2\mu_0 S}$$

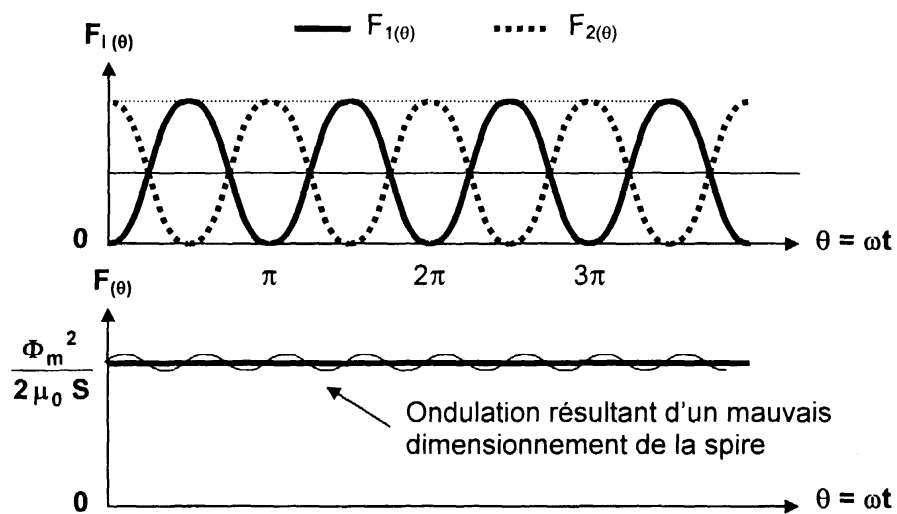


Figure 91

Champs magnétiques tournants

Théorème de Maurice Leblanc

Considérons un bobinage d'axe Ox parcouru par un courant $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$.

Ce dispositif permet de créer un champ en un point M de l'axe Ox défini par $\vec{b}_M = B_{\max} \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{u}_x$

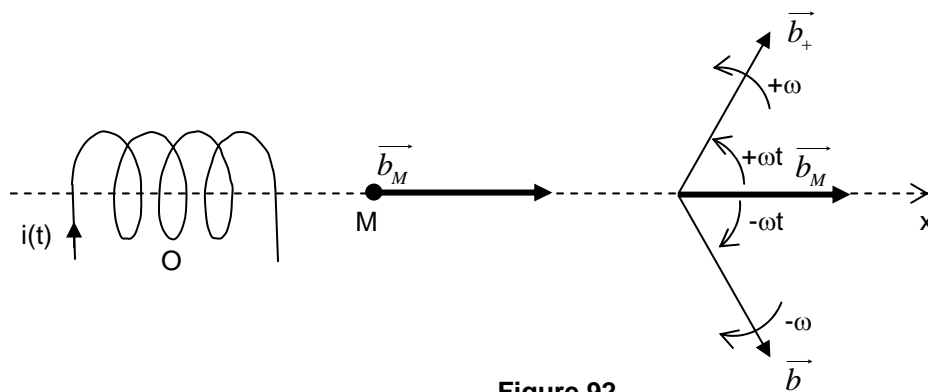


Figure 92

Considérons deux champs \vec{b}_+ et \vec{b}_- de norme constante $\frac{B_{\max}}{2}$ qui tournent en sens inverses l'un de l'autre à des vitesses ω et $-\omega$. En projetant \vec{b}_+ et \vec{b}_- sur les deux axes Ox et Oy, on obtient :

$$\vec{b}_+ + \vec{b}_- = \left[\frac{B_{\max}}{2} \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{u}_x + \frac{B_{\max}}{2} \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u}_y \right] + \left[\frac{B_{\max}}{2} \cdot \cos(-\omega t) \cdot \vec{u}_x + \frac{B_{\max}}{2} \cdot \sin(-\omega t) \cdot \vec{u}_y \right]$$

$$\text{Soit : } \vec{b}_{+y} + \vec{b}_{-y} = \frac{B_{\max}}{2} \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u}_y - \frac{B_{\max}}{2} \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u}_y = 0 = b_{My}(t)$$

$$\vec{b}_{+x} + \vec{b}_{-x} = B_{\max} \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{u}_x = \vec{b}_{Mx} = \vec{b}_M$$

Ce résultat constitue le théorème de Leblanc :

Un bobinage alimenté par un courant sinusoïdal $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$ crée un champ magnétique

$\vec{b}_M = B_{\max} \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{u}_x$ qui est équivalent à la somme de deux champs de norme constante $\frac{B_{\max}}{2}$

qui tournent en sens inverse aux vitesses ω et $-\omega$.

Cette décomposition mathématique d'un champ axial pulsatoire en deux champs tournants n'est pas qu'une vision abstraite dénuée de toute réalité. En effet, si nous plaçons un rotor (disque en matière conductrice) d'axe perpendiculaire à l'axe de la bobine et si nous lançons à la main celui-ci, il va "accrocher" le champ dans la direction duquel nous l'avons lancé et se mettre à tourner. Nous avons là un moteur asynchrone qui ne peut pas démarrer seul.

Ce théorème permet de comprendre comment obtenir un champ tournant au moyen d'un seul bobinage. Nous verrons que cela permet d'expliquer le fonctionnement des machines asynchrones monophasées.

Cas de deux bobines

On dispose, cette fois, deux bobines orthogonalement dans le repère Ox, Oy et on les alimente par des tensions alternatives sinusoïdales en quadrature. Chacune va créer 2 champs tournants comme vu précédemment. Mais la composition de ces deux champs va créer un véritable champ tournant constitué d'un seul vecteur tournant. Le rotor ne sera plus sollicité par 2 champs mais par un seul et cela permet de résoudre le problème du démarrage des moteurs asynchrones monophasés.

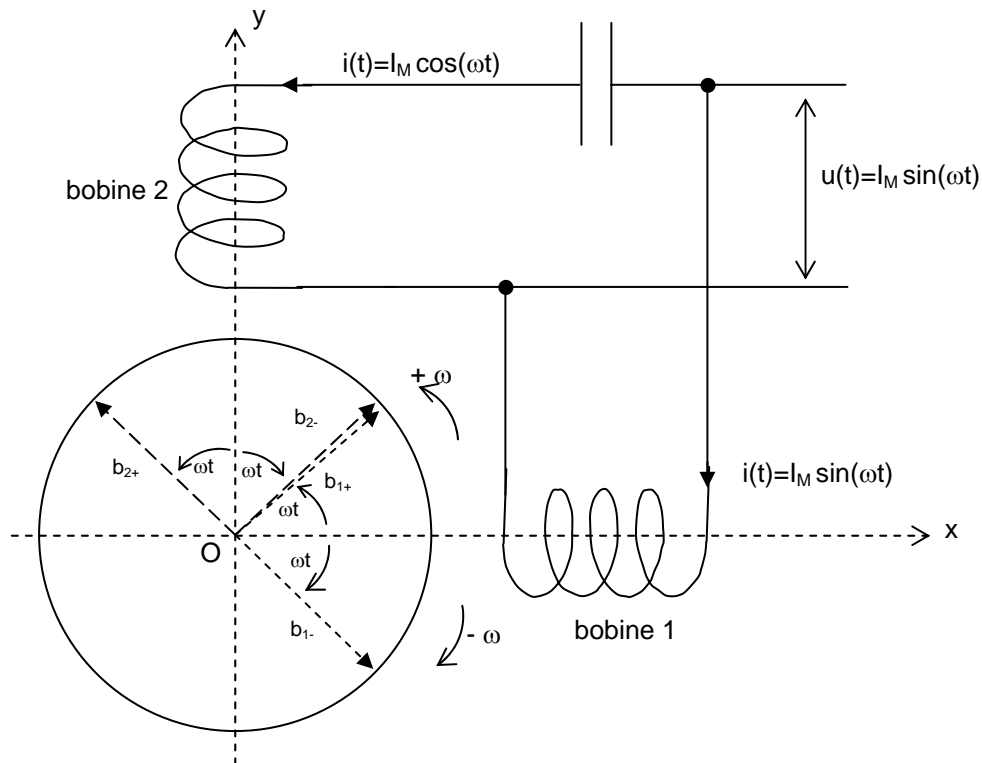


Figure 93

L'indice + correspond à une rotation dans le sens direct, l'indice - à une rotation dans le sens inverse.

Champ créé par la bobine 1 (d'axe de direction Ox) : $\vec{b}_1 = \vec{b}_{1+} + \vec{b}_{1-}$

Champ créé par la bobine 2 (d'axe de direction Oy) : $\vec{b}_2 = \vec{b}_{2+} + \vec{b}_{2-}$

Champ résultant : $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \vec{b}_{1+} + \vec{b}_{1-} + \vec{b}_{2+} + \vec{b}_{2-} = \vec{b}_{1+} + \vec{b}_{2-}$, les composantes \vec{b}_{1-} et \vec{b}_{2+} s'annulent.

Le condensateur permet d'obtenir que les intensités qui parcourent les deux bobines soient en quadrature. Le déphasage temporel des courants est égal au déphasage spatial des bobines.

Théorème de Galileo Ferraris

Rappel : champ magnétique créé par une bobine

Une bobine parcouru par un courant continu I créé un champ magnétique \vec{B} , d'amplitude constante, situé sur l'axe de la bobine. Soit un point M situé sur l'axe de la bobine, on mesure en ce point un module du champ \vec{B} qui vaut B_M .

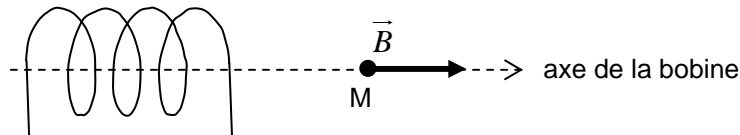


Figure 94

Si on mesure l'intensité du champ magnétique à partir d'un point, situé à la même distance du centre de la bobine, mais qui éloigné angulairement d'un angle θ de l'axe, on mesurera la projection de B_M en ce point, soit : $B_\theta = B_M \cdot \cos \theta$

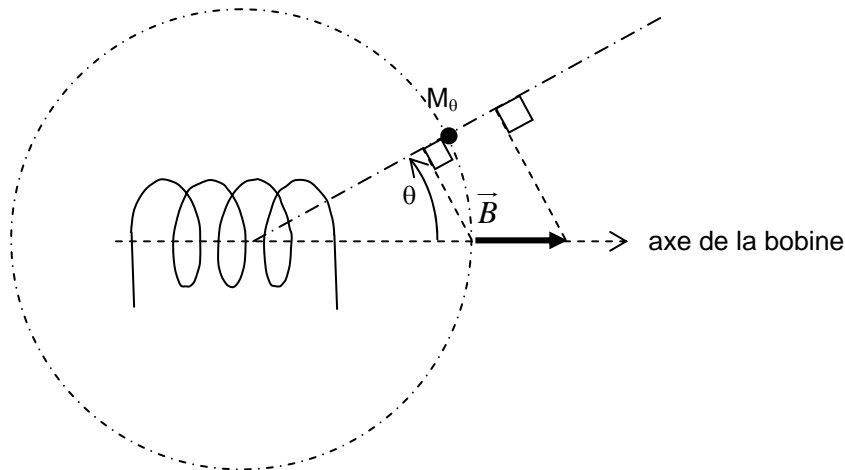


Figure 95

Par la suite, on admettra que la répartition du champ magnétique autour d'un bobinage est à répartition sinusoïdale.

Si le courant i est alternatif, le champ magnétique b sera lui aussi alternatif. Par exemple, si on a :

$i = I_{\max} \cos(\omega t)$, on aura $b = B_{\max} \cos(\omega t)$ sur l'axe de la bobine. Ce champ sera un champ "pulsé" maximum dans un sens, décroissant, puis maximum dans l'autre sens, croissant et à nouveau maximum suivant le sens positif et ainsi de suite. La mesure du champ en un point éloigné angulairement de l'axe de l'angle θ donnera $b_\theta = B_M \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos \theta$.

Champ créé par un ensemble de trois bobines décalées entre elles de 120° et alimentées par des tensions triphasées

Sur la Figure 96 sont représentés trois bobinages dont les axes sont décalés dans l'espace d'un angle de 120°. Ces bobinages sont parcourus par des courants triphasés équilibrés.

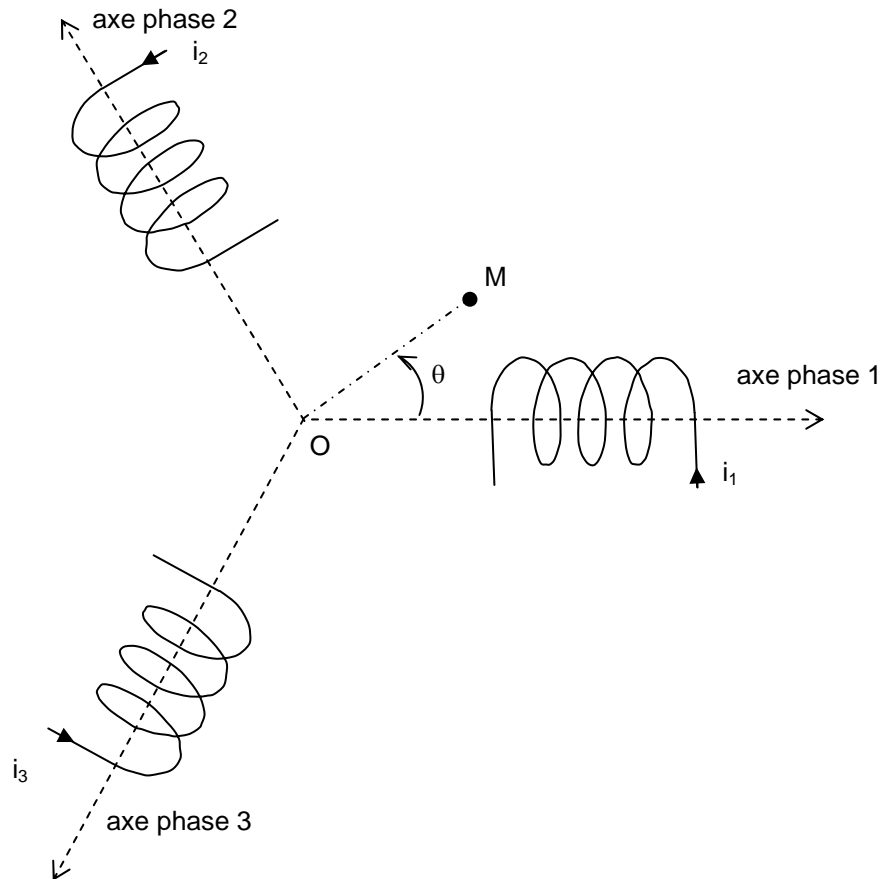


Figure 96

Selon ce que nous avons établi ci-dessus, le champ magnétique créé par la bobine n°1 au point M a pour module :

$$b_1(\theta, t) = k \cdot i_1(t) \cdot \cos(\theta)$$

de même, le champ magnétique créé par la bobine n°2 au point M a pour module :

$$b_2(\theta, t) = k \cdot i_2(t) \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

de même, le champ magnétique créé par la bobine n°3 au point M a pour module :

$$b_3(\theta, t) = k \cdot i_3(t) \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Si les courants sont triphasés, on a :

$$i_1(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

$$i_2(t) = I\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_3(t) = I\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Calculons la résultante totale du champ magnétique en M créé par les trois bobines. Il faut effectuer la somme des projections des trois vecteurs \vec{b}_1 , \vec{b}_2 , \vec{b}_3 .

$$b_M(\theta, t) = b_1(\theta, t) + b_2(\theta, t) + b_3(\theta, t) = k \cdot i_1(t) \cdot \cos(\theta) + k \cdot i_2(t) \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + k \cdot i_3(t) \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$b_M(\theta, t) = k \cdot I\sqrt{2} \cdot \left[\cos(\omega t) \cdot \cos(\theta) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

Transformons les produits de cosinus en somme grâce à la formule :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$b_M(\theta, t) = \frac{k \cdot I\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t - \theta) \right. \\ \left. + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ \left. + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$b_M(\theta, t) = \frac{k \cdot I\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t - \theta) \right. \\ \left. + \cos\left(\omega t + \theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(\omega t - \theta) \right. \\ \left. + \cos\left(\omega t + \theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(\omega t - \theta) \right]$$

$$b_M(\theta, t) = \frac{k \cdot I\sqrt{2}}{2} \cdot \left[3\cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t + \theta) + \cos\left(\omega t + \theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

Or :

$$\cos\left(\omega t + \theta - \frac{4\pi}{3}\right) = \cos(\omega t + \theta) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin(\omega t + \theta) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{2} \sin(\omega t + \theta)$$

et

$$\cos\left(\omega t + \theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos(\omega t + \theta) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin(\omega t + \theta) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos(\omega t + \theta) + \frac{1}{2} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\text{Donc : } \cos(\omega t + \theta) + \cos\left(\omega t + \theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \theta + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$\cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{2}\cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{2}\sin(\omega t + \theta) - \frac{1}{2}\cos(\omega t + \theta) + \frac{1}{2}\sin(\omega t + \theta) = 0$$

$$\text{Par conséquent : } b_M(\theta, t) = \frac{3}{2} \cdot k \cdot I \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - \theta)$$

Cette expression correspond à une onde progressive en rotation ou "champ tournant" à la vitesse angulaire ω .

En généralisant pour p "paires de pôles" par phase, on introduit l'angle mécanique $\theta_m = \frac{\theta}{p}$, qui caractérise la rotation physique du champ magnétique et on obtient alors :

$$b_M(\theta, t) = \frac{3}{2} \cdot k \cdot I \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - p\theta_m)$$

La vitesse angulaire du champ tournant est alors : $\Omega_s = \frac{\omega}{p}$ en rad/s ou $N_s = \frac{f}{p}$ en tr/s avec ω et f respectivement la pulsation (en rad/s) et la fréquence des tensions ou des courants qui alimentent les bobines. L'indice "s" désigne la vitesse de synchronisme.

Ce résultat constitue le **théorème de Ferraris** (formulé vers 1884):













Si on alimente par des tensions triphasées équilibrées un ensemble de p bobines par phase (p paires de pôles par phase) décalées angulairement de $\frac{2\pi}{p}$ radians les unes par rapport aux autres, alors ces bobines produisent un champ magnétique d'amplitude constante et qui tourne à la vitesse :

$\boxed{N_s = \frac{f}{p}}$ en tr/s ou $\boxed{\Omega_s = \frac{\omega}{p}}$ rad/s, avec f fréquence des tensions alimentant les bobines et ω pulsation des tensions alimentant les bobines.

Ce théorème capital est à la base du fonctionnement des machines asynchrones triphasées (80 % des machines électriques) et des machines synchrones.

Version à jour du 26/06/2008

Le firmament de l'électromagnétisme et ses étoiles

 <p>Hans Christian Oersted (Physicien danois né à Rudkøbing en 1777, mort à Copenhague en 1851)</p>	 <p>Jean Baptiste Biot (né le 21 avril 1774 à Paris, mort le 3 février 1862 à Paris)</p>	 <p>Michael Faraday (né le 22 septembre 1791 dans le Surrey (Angleterre), mort à Hampton Court le 25 août 1867)</p>	 <p>André-Marie Ampère (né à Poleymieux-au-Mont-d'Or près de Lyon le 20 janvier 1775, mort le 10 juin 1836 à Marseille)</p>
 <p>Pierre Simon de Laplace (né à Beaumont-en-Auge, Normandie le 23 mars 1749, mort à Paris le 5 mars 1827)</p>	 <p>Heinrich Friedrich Emil Lenz (Physicien russe d'origine allemande né à Dorpat (actuellement Tartu) Estonie en 1804, mort à Rome en 1865)</p>	 <p>Wilhem Eduard Weber (Né le 24 Octobre 1804 à Wittenberg, Allemagne, mort le 23 juin 1891 à Göttingen, Allemagne)</p>	 <p>Joseph Henry (né le 17 décembre 1797 à Albany, mort le 13 mai 1878 à Washington)</p>
 <p>Zénobe Theophile Gramme (né le 4 Avril 1826, à Jehay-Bodegnée, Belgique mort le 20 Janvier, 1901, à Paris)</p>	 <p>James Clerk Maxwell (Physicien écossais né à Édimbourg en 1831, mort à Cambridge en 1879)</p>	 <p>Galileo Ferraris (né le 30 novembre 1857 à San Lorenzo di Livorno, Italie, mort le 7 février 1927)</p>	 <p>John Hopkinson (Né le 27 Juillet, 1849, à Manchester, Angleterre mort le 27 Août, 1898, à Evolona, Suisse)</p>